

Riemann
et le théorème des
nombre premiers

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Un calcul	6
1.2	Une décomposition	8
2	La fonction ζ	11
2.1	Définition	11
2.2	Convergence et prolongement	12
2.3	Produit d'Euler	13
2.4	Équation fonctionnelle et prolongement de ζ à tout le plan complexe	13
3	Majorations de ζ	17
3.1	Majorations élémentaires	17
3.2	Majoration de ζ pour $\Re s > 1/2$	18
3.3	Le rapport de l'équation fonctionnelle	18
3.4	Majoration de ζ pour $\Re s < 1/2$	21
4	Zéros dans la bande critique	23
4.1	Distribution	23
4.2	Sommes sur les zéros	26

5	Les fonctions de Tchebycheff	29
5.1	Définitions	30
5.2	Lien avec la fonction ζ	30
5.3	Équivalences sur les limites des fonctions de Tchebycheff (1)	31
5.4	Équivalences sur les limites des fonctions de Tchebycheff (2)	36
6	La fonction ξ de Riemann	39
6.1	Définition	39
6.2	Ordre de croissance de ξ	40
6.3	Décomposition de ξ	42
7	Egalité de Riemann-von Mangoldt	43
7.1	Dérivées logarithmiques de ξ et ζ	44
7.2	Intégrale de la dérivée logarithmique de ζ . (A)	48
7.3	Intégrale de la dérivée logarithmique de ζ . (B)	54
7.4	Formule exacte de von Mangoldt	56
8	$\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) = 1$	57
9	Le théorème des nombres premiers	60
10	Vers l'hypothèse de Riemann	65
10.1	La croissance de ψ et la partie réelle des racines . . .	65
10.2	Hypothèse de Riemann	70

A	Rappel : Fonctions analytiques et fonctions holomorphes	71
A.1	Fonctions holomorphes	71
A.2	Intégrales des fonctions holomorphes sur un chemin	71
A.3	Fonctions analytiques	80
A.4	Zéros isolés et prolongement analytique	81
A.5	Maximum d'une fonction holomorphe	82
A.6	Zéros des fonctions holomorphes	86
B	Rappel : Fonctions méromorphes	90
B.1	Définition	90
B.2	Zéros et pôles	91
B.3	Résidus	93
C	Rappel : Fonctions spéciales	97
C.1	Fonctions trigonométriques	97
C.2	Gamma	103
C.3	Theta	113
D	Formules de Jensen et factorisation des fonctions holomorphes d'ordre 1	118
D.1	Fonctions harmoniques	118
D.2	Transformation de Moëbius	125
D.3	Formule de Jensen	126
D.4	Ordre d'une fonction analytique	129
D.5	Produit d'Hadamard	130

Chapitre 1

Introduction

Intéressons-nous à la somme :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2}$$

Lemme 1.0.1. *Cette somme est absolument convergente.*

Démonstration. Pour $1 < i \leq x \leq i + 1$, on a : $1/i \leq 1/(x - 1)$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^2} &= 1 + \sum_{i=2}^N \int_i^{i+1} \frac{1}{i^2} dx \leq 1 + \sum_{i=2}^N \int_i^{i+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= 1 + \int_2^{N+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^{N+1} = 1 - \frac{1}{N} + 1 < 2 \end{aligned}$$

□

1.1 Un calcul

Théoreme 1.1.1.

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Démonstration. Comme la somme est absolument convergente :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} = \frac{4}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Mais :

$$\frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{2n} y^{2n} dx dy$$

Et

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^{2n} y^{2n} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} x^{2n} y^{2n} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2 y^2} dx dy\end{aligned}$$

On fait le changement de variables

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sin u}{\cos v} & y &= \frac{\sin v}{\cos u} \\ u &= \arctan \left(x \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \right) & v &= \arctan \left(y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} \right)\end{aligned}$$

Le Jacobien est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 v \cos^2 u} = 1 - x^2 y^2$$

L'intervalle d'intégration devient l'ensemble A des couples (u, v) tels que $u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq \pi/2$. La surface de ce triangle, rectangle, isocèle de côté $\pi/2$, est $\pi^2/8$. Donc :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2 y^2} dx dy = \int \int_A du dv = \frac{\pi^2}{8}$$

Et

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

1.2 Une décomposition

Théoreme 1.2.1.

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2}}$$

Démonstration. Soit p un nombre premier et I_p l'ensemble de ses puissances : $I_p = \{1, p, p^2, p^3, \dots\}$. Alors

$$\sum_{i \in I_p} \frac{1}{i^2} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{p^{2j}} = \frac{1}{1 - p^{-2}}$$

Soient p et q deux nombres premiers ; I_p et I_q sont disjoints ; soit I_{pq} l'ensemble des produits d'un élément de I_p et d'un élément de I_q . Alors

$$\sum_{i \in I_{pq}} \frac{1}{i^2} = \sum_{k \in I_p} \frac{1}{k^2} \sum_{j \in I_q} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{1 - p^{-2}} \frac{1}{1 - q^{-2}}$$

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique tout nombre

entier s'écrit comme produit fini de puissances de nombres premiers :

$$i = \prod_p p^{i_p}$$

Il est équivalent de dire que i appartient à $I_{p_1 p_2 \dots p_k}$, où

1. les p_i sont les nombres premiers qui apparaissent dans la décomposition de i
2. $I_{p_1 p_2 \dots p_k}$ désigne l'ensemble des produits d'éléments des I_{p_i}

On considère les ensembles $J_n = I_{p_1 p_2 \dots p_k}$ où les p_i sont les nombres premiers plus petits que n . On a :

$$\sum_{i \in J_n} \frac{1}{i^2} = \prod_{p \leq n} \frac{1}{1 - p^{-2}}$$

On a :

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i \in J_n} \frac{1}{i^2} + \sum_{i \notin J_n} \frac{1}{i^2}$$

Mais :

$$\sum_{i \notin J_n} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i \geq n} \frac{1}{i^2}$$

Comme la série de terme général $1/i^2$ converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \geq n} \frac{1}{i^2} = 0$$

On récapitule :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} \frac{1}{i^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \notin J_n} \frac{1}{i^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} \frac{1}{i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{p \leq n} \frac{1}{1 - p^{-2}} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2}} \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

La fonction ζ

2.1 Définition

Définition 2.1.1. Pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

Théoreme 2.1.2. La fonction ζ est une fonction holomorphe définie pour $\Re s > 1$.

Démonstration. On écrit, pour $\Re s > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} &= \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{d[x]}{x^s} = \left[\frac{[x]}{x^s} \right]_{\frac{1}{2}}^{+\infty} + s \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx \\ &= s \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx \end{aligned}$$

La série converge absolument pour $\Re s \geq s_0 > 1$:

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^s} \right| \leq |s| \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{\Re s+1}} dx = |s| \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{s_0}} dx < +\infty$$

Le résultat est dérivable :

$$\frac{d}{ds} \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{d}{ds} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = - \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} \log x dx$$

□

2.2 Convergence et prolongement

Théoreme 2.2.1. *La fonction ζ qui est définie pour $\Re s > 1$ se prolonge pour $\Re s > 0$ en une fonction méromorphe qui a un seul pôle en $s = 1$.*

Démonstration. On a, pour $\Re s > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = s \int_1^{+\infty} \frac{x - ([x] - x)}{x^{s+1}} dx \\ &= s \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{s+1}} dx - s \int_1^{+\infty} \frac{([x] - x)}{x^{s+1}} dx \\ &= \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{([x] - x)}{x^{s+1}} dx \end{aligned}$$

Comme $0 \leq x - [x] < 1$, la dernière partie de la formule définit une fonction holomorphe pour $\Re s > 0$. Et le résultat.

□

2.3 Produit d'Euler

Théoreme 2.3.1. *Pour $\Re(s) > 1$*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Démonstration. C'est la conséquence du théorème fondamental de l'arithmétique. On a :

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{k \geq 0} p^{-ks}$$

La démonstration qui a été donnée pour $s = 2$ en 1.2.1 se généralise sans peine. Il y a équivalence entre les nombres entiers et les produits finis de puissances finies de nombres premiers. Donc, formellement, les deux expressions de ζ , somme et produit, coïncident. Elles convergent toutes les deux pour $\Re(s) > 1$. $\square$

2.4 Équation fonctionnelle et prolongement de ζ à tout le plan complexe

Soit $\theta(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x}$; la définition et les propriétés de la fonction θ sont données en C.3.

Lemme 2.4.1. *Pour $\Re(s) > 1$, on a :*

$$\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-s}{2}} = \int_0^{+\infty} \theta(x) x^{\frac{s}{2}} dx$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} &= \frac{1}{n^s}\pi^{-\frac{s}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi y}y^{\frac{s}{2}}\frac{dy}{y} \text{ avec le changement : } x = n^2\pi y\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{-\frac{s}{2}} &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_n \frac{1}{n^s} = \sum_n \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} \\ &= \sum_n \int_0^{+\infty} e^{-n^2\pi y}y^{\frac{s}{2}}\frac{dy}{y} = \int_0^{+\infty} \sum_n e^{-n^2\pi y}y^{\frac{s}{2}}\frac{dy}{y} \\ &= \int_0^{+\infty} \theta(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4.2. Pour $\Re(s) > 1$, on a :

$$\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_1^{+\infty} \theta(x)(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}})\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{-\frac{s}{2}} &= \int_0^{+\infty} \theta(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} \\ &= \int_0^1 \theta(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \theta(x)x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans la première inté-

grale.

$$\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-s}{2}} = - \int_{+\infty}^1 \theta(1/x) x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \theta(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\begin{aligned} \zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-s}{2}} &= \int_1^{+\infty} \left(\theta(x) x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{2} \right) x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \theta(x) x^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^{+\infty} \theta(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{1-s}{2}} - x^{\frac{-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^{+\infty} \theta(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1-s}{2}} + \frac{1}{\frac{-s}{2}} \right) \\ &= \int_1^{+\infty} \theta(x) \left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)} \end{aligned}$$

□

Théoreme 2.4.3. Pour $0 < \Re(s) < 1$, on a :

$$\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-s}{2}} = \zeta(1-s) \times \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-(1-s)}{2}}$$

Démonstration. Découle de la proposition précédente et du principe du prolongement analytique. □

Théoreme 2.4.4. La fonction ζ se prolonge à tout le plan complexe et y vérifie l'équation fonctionnelle ci-dessus.

Ce théorème résulte du principe du prolongement analytique, de

l'extension au demi-plan $\Re(s) > 0$ (2.4.4) et de l'équation fonctionnelle dans la bande $0 < \Re(s) < 1$ (2.4.3).

Chapitre 3

Majorations de ζ

3.1 Majorations élémentaires

Notation 3.1.1. Dans ce qui suit, un nombre complexe s'écrit :
 $s = \sigma + it$

Lemme 3.1.2. Pour $\sigma \geq 1$, on a : $|\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$

Démonstration. $|n^{-(\sigma+it)}| = n^{-\sigma}$. □

Lemme 3.1.3. Pour $\sigma \geq 1$, on a : $|\zeta(\sigma + it)| \geq 1/\zeta(\sigma)$

Démonstration.

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &= \prod_p \left| \frac{1}{1 - p^{-(\sigma+it)}} \right| = \prod_p \frac{1}{|1 - p^{-(\sigma+it)}|} \\ &\geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-\sigma}} \geq \prod_p (1 - p^{-\sigma}) = \frac{1}{\zeta(\sigma)} \end{aligned}$$

□

3.2 Majoration de ζ pour $\Re s > 1/2$

Lemme 3.2.1. *Pour $\Re s > 1/2$, $\zeta(s) \in O(s)$*

Démonstration. On a vu dans la démonstration de 2.2.1 que, pour $\Re s > 0$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx$$

Pour $\sigma \geq 1/2$, on a :

$$\begin{aligned} \left| s \int_1^{+\infty} \frac{[x] - x}{x^{s+1}} dx \right| &\leq |s| \int_1^{+\infty} \frac{|[x] - x|}{|x^{s+1}|} dx \\ &\leq |s| \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx \\ &= |s| \frac{1}{\sigma} \leq 2 |s| \end{aligned}$$

□

3.3 Le rapport de l'équation fonctionnelle

Définition 3.3.1. *On note $\chi(s)$ le rapport de l'équation fonctionnelle :*

$$\chi(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma(\frac{1-s}{2})}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})}$$

Lemme 3.3.2. *On a :*

$$\chi(s) = \frac{\pi^s 2^{s-1}}{\cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s)}$$

Démonstration. D'après la formule des compléments démontrée en C.2.7, on a, avec $u = \frac{s}{2} + \frac{1}{2}$:

$$\Gamma(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(1 - \frac{s}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \pi(\frac{s}{2} + \frac{1}{2})}$$

Soit

$$\Gamma(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1-s}{2}) = \frac{\pi}{\cos \pi(\frac{s}{2})}$$

D'après la formule de duplication démontrée en C.2.12, on a, avec $u = \frac{s}{2}$:

$$\Gamma(\frac{s}{2}) \Gamma(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s)}{2^s}$$

On divise l'une par l'autre ces deux égalités.

$$\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{\pi}{\cos \pi(\frac{s}{2})} \times \frac{2^s}{2\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} 2^{s-1}}{\cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s)}$$

Et

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma(\frac{1-s}{2})}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{\pi^s 2^{s-1}}{\cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s)}$$

□

Lemme 3.3.3. Dans une bande $\alpha \leq \sigma \leq \beta$, $\chi(s) \in O(t^{-\sigma+1/2})$.

Démonstration. 1. D'après la formule de Stirling, démontrée en C.2.14, dans une bande $\alpha \leq \sigma \leq \beta$, lorsque t tend vers $+\infty$, on a :

$$\Gamma(s) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s$$

2. On a :

$$|s^s| = e^{-t \operatorname{Arg}[s]} |s|^\sigma$$

3. Dans une bande $\alpha \leq \sigma \leq \beta$, lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\left| \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right| \simeq \frac{1}{2} e^{\frac{\pi t}{2}}$$

4. Donc :

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \frac{\pi^s 2^{s-1}}{\cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s)} = \frac{\pi^s 2^{s-1}}{\frac{1}{2} e^{\frac{\pi t}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s} \simeq \left(\frac{2\pi e}{s}\right)^s e^{\frac{-\pi t}{2}} \sqrt{\frac{s}{\pi}} \\ |\chi(s)| &\simeq \left| \left(\frac{2\pi e}{s}\right)^s \right| \times e^{\frac{-\pi t}{2}} \times \sqrt{\frac{s}{\pi}} \simeq \left(\frac{2\pi e}{|s|}\right)^\sigma \times e^{t(\operatorname{Arg}(s) - \pi/2)} \times \sqrt{\frac{s}{\pi}} \end{aligned}$$

5. Dans une bande $\alpha \leq \sigma \leq \beta$, lorsque t tend vers $+\infty$, $\operatorname{Arg}(s)$

tend vers $\pi/2$, donc $|s|/t$ tend vers 1, et on peut écrire

$$|\chi(s)| \simeq \left(\frac{2\pi e}{t}\right)^\sigma \times e^{\frac{\pi t}{2}} \times e^{\frac{-\pi t}{2}} \times \sqrt{\frac{t}{\pi}} \simeq \left(\frac{1}{2\pi e}\right)^\sigma \sqrt{\frac{1}{\pi}} t^{-\sigma+\frac{1}{2}}$$

6. On a donc une relation

$$|\chi(s)| \leq K(\sigma)|s|^{-\sigma+1/2}$$

avec

$$K(\sigma) = \left(\frac{1}{2\pi e}\right)^\sigma \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

Et pour $\alpha \leq \sigma \leq \beta$,

$$|\chi(s)| = O(t^{-\sigma+1/2})$$

□

3.4 Majoration de ζ pour $\Re s < 1/2$

Lemme 3.4.1. *Dans une bande $\alpha < \sigma \leq 1/2$, on a : $\zeta(s) = O(t^{3/2-\alpha})$*

Démonstration. On a : $\zeta(1-s) = \zeta(s)/\chi(s)$. On vient de montrer que si $s = \sigma + it$, dans une bande $1/2 \leq \sigma \leq \beta$, on a : $\zeta(s) \in O(|t|)$ et

$\chi(s) \in O(t^{1/2-\sigma})$. Donc, dans une telle bande :

$$\zeta(1-s) = O(t^{1+\sigma-1/2}) = O(t^{1/2+\sigma})$$

Soit $s = \sigma + it$ avec $\alpha \leq \sigma < 1/2$. Alors $1-s$ est de partie réelle $1-\sigma > 1/2$ et

$$\zeta(1-s) = O(t^{1/2+(1-\sigma)}) = O(t^{3/2-\sigma})$$

Donc, dans une bande $\alpha < \sigma < 1/2$, $\zeta(s) = O(t^{3/2-\alpha})$ □

Lemme 3.4.2. Dans la bande $-3 < \sigma \leq 1/2$, $\zeta(s) = O(|t|^5)$

Démonstration. Corollaire du précédent. □

Chapitre 4

Zéros dans la bande critique

4.1 Distribution

Notation 4.1.1. Soit $N(T)$ le nombre zéros de ζ dont la partie imaginaire est comprise entre 0 et T .

Lemme 4.1.2. Majoration fondamentale. $N(T+1) - N(T) \leq 5 \log T$

Démonstration. 1. On considère la situation décrite dans la figure 4.1 avec $R = 6$ et $r = 3$.

2. $\zeta(s)$ est holomorphe autour du cercle dès que $T > R$.
3. Il y a $N(T+1) - N(T)$ zéros dans le carré gris.
4. On utilise le théorème de Borel, démontré en A.6.2, sur les relations entre les zéros d'une fonction holomorphe et sa majoration : si ζ a m zéros dans le petit disque, et si M est le maximum de ζ sur le grand cercle, on a :

$$\left(\frac{6}{3}\right)^m \leq \frac{M}{|\zeta(2 + iT)|}$$

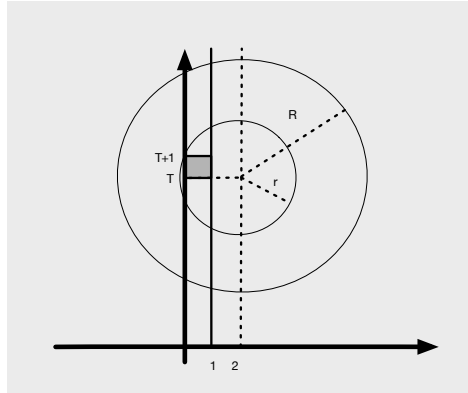


FIGURE 4.1 – Les zéros de partie imaginaires comprise entre T et $T + 1$ sont dans le carré gris, donc dans le petit disque.

5. On a : $N(T + 1) - N(T) \leq m$
6. Le cercle extérieur est inclus dans l'union des bandes $-3 < \sigma \leq 1/2$ et $\sigma \geq 1/2$. D'après 3.4.1 et 3.4.2, il existe K tel que, pour $|\sigma + iT| = 6$, $|\zeta(\sigma + iT)| = O(T^5)$. On a donc $M = O((T + 6)^5) = O(T^5)$
7. D'après 3.1.2 :

$$\frac{1}{|\zeta(2 + iT)|} \leq \zeta(2)$$

8. On récapitule :

$$2^m = O(T^5 \zeta(2)) = O(T^5)$$

$$2^m \leq K T^5 \text{ pour un nombre } K > 0$$

$$m \leq (\log K + 5 \log T)/\log 2$$

$$m \leq 5 \log T \text{ pour } T \text{ assez grand}$$

9. Et :

$$N(T+1) - N(T) \leq 5 \log T$$

□

Lemme 4.1.3. $N(t) < 5 T \log T$

Démonstration. C'est une conséquence de la majoration 4.1.2 :

$$N(T) = \sum_{t < T} (N(t+1) - N(t)) \leq 5 \sum_{t < T} \log t \leq 5 T \log T$$

□

Lemme 4.1.4. $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \log \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$

Démonstration. A donner.

□

Lemme 4.1.5. $\rho \simeq 2\pi n/\log n$

Démonstration. A donner.

□

Lemme 4.1.6. $\rho_{n+1} - \rho_n \simeq 2\pi/\log n$

Démonstration. **A donner.**

□

4.2 Sommes sur les zéros

Lemme 4.2.1. *Pour tout $\epsilon > 0$, il y a convergence de*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} |\rho|^{-(1+\epsilon)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \Im(\rho) < T} |\rho|^{-(1+\epsilon)} &\leq \sum_{0 < t < T-1} \left(\sum_{t < \Im(\rho) < t+1} |\rho|^{-(1+\epsilon)} \right) \\ &\leq \sum_{0 < t < T-1} \left(\sum_{t < \Im(\rho) < t+1} t^{-(1+\epsilon)} \right) \\ &\leq \sum_{0 < t < T-1} (N(t+1) - N(t)) t^{-(1+\epsilon)} \\ &\leq \sum_{0 < t < T-1} (5 \log t) t^{-(1+\epsilon)} \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} |\rho|^{-(1+\epsilon)} &< +\infty \end{aligned}$$

□

Lemme 4.2.2. *Il y a convergence de :*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{I(\rho) < T} \frac{1}{|\rho(\rho + 1)|}$$

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme précédent et de ce que : $|\rho(\rho + 1)| \geq |\rho|^{1+\epsilon}$. $\square$

Lemme 4.2.3. *Il y a convergence de :*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} \frac{1}{\rho(1 - \rho)}$$

Démonstration. 1. On écrit

$$\begin{aligned} \rho(1 - \rho) &= \left(\frac{1}{2} + \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2} - \left(\rho - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 1/4 - \left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

2. Il n'y a qu'un nombre fini de ρ tels que

$$|\rho(1 - \rho)| < \left|\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2\right|$$

3. Il suffit donc de montrer que $\sum_{\rho} |\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2|^{-1}$ converge. Or cela se déduit immédiatement de 4.2.1. $\square$

Lemme 4.2.4. *Il y a convergence de*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{|I(\rho)| < T} \frac{1}{\rho}$$

Démonstration. On applique l'équation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \sum_{|I(\rho)| < T} \frac{1}{\rho} &= \sum_{0 < I(\rho) < T} \frac{1}{\rho} + \sum_{0 > I(\rho) > -T} \frac{1}{\rho} \\ &= \sum_{0 < I(\rho) < T} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} \right) = \sum_{0 < I(\rho) < T} \frac{1}{\rho(1-\rho)} \end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Les fonctions de Tchebycheff

Les fonctions de Tchebycheff sont trois fonctions assez faciles à formuler qui simplifient considérablement l'analyse de la distribution des nombres premiers. C'est avec ces fonctions que Tchebycheff a démontré les premiers résultats importants en direction du théorème des nombres premiers.

5.1 Définitions

Définition 5.1.1. p désignant un nombre premier et x un nombre réel positif, on note :

$$\Pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

$$\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ a plusieurs facteurs distincts} \\ \log p & \text{si } n \text{ n'a que } p \text{ pour facteur} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

5.2 Lien avec la fonction ζ

Théoreme 5.2.1. Pour $\Re(s) > 1$,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_n \Lambda(n)n^{-s}$$

Démonstration. Pour $\Re(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \right)' / \frac{1}{1-p^{-s}} = - \sum_p \frac{p^{-s} \log p}{1-p^{-s}} \\ &= - \sum_p \left(\log p \times \sum_j p^{-js} \right) = - \sum_n \Lambda(n) n^{-s}\end{aligned}$$

□

5.3 Équivalences sur les limites des fonctions de Tchebycheff (1)

Lemme 5.3.1.

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{2n \log 2}{\log n}$$

Démonstration. Un nombre premier $p \in]n, 2n]$ divise $(2n)!$ mais pas $n!$. Il divise donc $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$. Donc

$$\prod_{p \in]n, 2n]} p \leq \binom{2n}{n}$$

Mais

$$\prod_{p \in]n, 2n]} p \geq n^{\pi(2n) - \pi(n)}$$

Et

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

D'où,

$$\begin{aligned} n^{\pi(2n)-\pi(n)} &\leq 2^{2n} \\ \pi(2n) - \pi(n) &\leq \frac{2n \log 2}{\log n} \end{aligned}$$

□

Lemme 5.3.2.

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \in O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Démonstration. On majore $\pi(x) - \pi([x])$.

□

Lemme 5.3.3.

$$\pi(x) \log x \in O(x)$$

Démonstration. On peut itérer $j = [\log x / \log 2]$ fois la relation [5.3.2](#) :

$$\begin{aligned} \pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2^j}\right) &\in [\log x / \log 2] O\left(\frac{x}{\log x}\right) \\ &= O(x) \end{aligned}$$

□

Lemme 5.3.4.

$$\Theta(x) \in O(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p \\ &\leq \pi(x) \log x \end{aligned}$$

□

Lemme 5.3.5.

$$\psi(x) - \Theta(x) \in O(x^{1/2} \log x)$$

Démonstration. Avec au plus $[\log x / \log 2]$ termes non nuls, on a :

$$\psi(x) = \Theta(x) + \Theta(x^{1/2}) + \dots + \Theta(x^{1/n})$$

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \Theta(x)| &\leq \Theta(x^{1/2}) + \dots + \Theta(x^{1/n}) \\ &\leq \frac{\log x}{\log 2} \Theta(x^{1/2}) \\ \psi(x) - \Theta(x) &\in O(x^{1/2} \log x) \end{aligned}$$

□

Théoreme 5.3.6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{aligned}\psi(x) &\simeq x \\ \Theta(x) &\simeq x \\ \pi(x) &\simeq \frac{x}{\log x}\end{aligned}$$

Démonstration. 1. Les deux premières sont équivalentes d'après
5.3.5

2. Si $\pi(x) \simeq x \log x$. Avec $1 < y < x$, on a :

$$(\pi(x) - \pi(y)) \log y \leq \Theta(x) \leq \pi(x) \log x$$

Soit, pour x et y assez grands :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\log x} - \frac{y}{\log y}\right) \log y &\leq \Theta(x) \leq \frac{x}{\log x} \log x \\ x \left(\frac{\log y}{\log x} - \frac{y}{x}\right) &\leq \Theta(x) \leq x\end{aligned}$$

On fait $y = x/(\log x)^2$. On a : $\log y = \log x - 2 \log \log x$ et

$$\frac{\log y}{\log x} - \frac{y}{x} = \frac{\log x - 2 \log \log x}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}$$

tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Si $\Theta(x) \simeq x$. On écrit :

$$(\pi(x) - \pi(y)) \log y \leq \Theta(x) \leq \pi(x) \log x$$

On en déduit :

$$\pi(x) \log y - \Theta(y) \leq \Theta(x) \leq \pi(x) \log x$$

Puisque Si $\Theta(x) \simeq x$, pour x et y assez grands, on a :

$$\pi(x) \log y - y \leq x \leq \pi(x) \log x$$

On fait $y = x/(\log x)^2$; $\log y = \log x - 2 \log \log x$.

$$\pi(x)(\log x - \log \log x) - \frac{x}{(\log x)^2} \leq x \leq \pi(x) \log x$$

On divise par x

$$\pi(x) \frac{\log x}{x} - \pi(x) \frac{\log \log x}{x} - \frac{1}{(\log x)^2} \leq 1 \leq \pi(x) \frac{\log x}{x}$$

Et comme $\pi(x) \in O(x/\log x)$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\log \log x}{x} = 0$$

□

5.4 Équivalences sur les limites des fonctions de Tchebycheff (2)

Lemme 5.4.1. Soit $1/2 < \theta \leq 1$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes ;

$$\begin{aligned}\psi(x) - x &\in O\left(x^\theta (\log x)^2\right) \\ \Theta(x) - x &\in O\left(x^\theta (\log x)^2\right) \\ \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} &\in O\left(x^\theta \log x\right)\end{aligned}$$

Démonstration. 1. D'après 5.3.5, $\psi(x) - \Theta(x) \in O(x^{1/2} \log x)$.

Et on a : $\theta > 1/2$. Donc les deux premières propriétés sont équivalentes.

2. On a : $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ et donc :

$$\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \int_2^x \frac{d(\Theta(u))}{\log u}$$

On a :

$$\begin{aligned}\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} &= \int_2^x \frac{d(\Theta(u) - u)}{\log u} \\ &= \frac{\Theta(x) - x}{\log x} + \frac{2}{\log 2} - \int_2^x (\Theta(u) - u) d \frac{1}{\log u}\end{aligned}$$

3. Si $\Theta(x) - x \in O(x^\theta(\log x)^2)$,

$$\frac{\Theta(x) - x}{\log x} \in O(x^\theta \log x)$$

Et :

$$\begin{aligned} \int_2^x (\Theta(u) - u) d\frac{1}{\log u} &= \int_2^x (\Theta(u) - u) \frac{du}{u(\log u)^2} \\ &\in O\left(\int_2^x (u^\theta(\log u)^2) \frac{du}{u(\log u)^2}\right) = O(x^\theta) \end{aligned}$$

Donc

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \in O(x^\theta \log x)$$

4. Si

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} \in O(x^\theta \log x)$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \int_2^x \log y \, d\pi(y) dy \\ (x - 2) &= \int_2^x \log y \, d\left(\int_2^y \frac{du}{\log u}\right) dy \\ \Theta(x) - (x - 2) &= \int_2^x \log y \, d\left(d\pi(y) - \int_2^y \frac{du}{\log u}\right) dy \\ &= \log x \left(\pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u}\right) - \int_2^x \left(\pi(y) - \int_2^y \frac{du}{\log u}\right) \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\Theta(x) - x \in O\left(x^\theta (\log x)^2\right) + O\left(\int_2^x y^\theta \log y \frac{dy}{y}\right) = O\left(x^\theta (\log x)^2\right)$$

□

Chapitre 6

La fonction ξ de Riemann

6.1 Définition

Définition 6.1.1. La fonction ξ de Riemann est donnée par :

$$\xi(s) = -\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

Lemme 6.1.2. On a : $\xi(s) = \xi(1-s)$

Démonstration. C'est l'équation fonctionnelle de ζ . □

Lemme 6.1.3. Les zéros non triviaux de ζ , i. e., de partie réelle positive, sont exactement les zéros de ξ .

Démonstration. On sait que : (a) ζ a un pôle simple en $s = 1$, (b) $\zeta(s)$ n'a ni pôle ni zéro pour $\Re(s) > 1$, (c) $\Gamma(s)$ a des pôles aux entiers négatifs pairs, (d) $\Gamma(s)$ a un seul zéro en $s = 1$, ζ et Γ satisfont à

l'équation fonctionnelle 2.4.3 :

$$\zeta(s) \times \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-s}{2}} = \zeta(1-s) \times \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \times \pi^{\frac{-(1-s)}{2}}$$

Donc ζ a deux types de zéros (a) les zéros triviaux : ceux qui correspondent aux pôles simples de Γ aux entiers négatifs, (b) les zéros non triviaux : les autres, et ils sont tels que $0 \leq \mathcal{R}(s) \leq 1$. Ceux-ci sont les zéros de ξ . $\square$

6.2 Ordre de croissance de ξ

Definition 6.2.1. Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ est d'ordre 1 si pour tout ϵ , il existe M tel que pour $|z| > M$:

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{1+\epsilon}}$$

Notation 6.2.2. On écrit que $f(s) \ll g(s)$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe M tel que pour tout $|s| > m$, on ait $|f(s)| < |g(s)|^{1+\epsilon}$.

Lemme 6.2.3. ξ est d'ordre 1.

Démonstration. L'équation fonctionnelle permet de ne considérer des valeurs de s telles que $\mathcal{R}(s) \geq 1/2$. On a :

1.

$$\frac{1}{2\pi} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{s}{2} \log \pi} \left(e^{2 \log s} - e^{\log s} \right) \ll e^{|s| + \log |s|} \ll e^{|s|}$$

2. D'après la formule de Stirling démontrée en C.2.14,

$$\Gamma(s) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s$$

Et

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(1)$$

$$\log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \ll |s| \log |s|$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \ll e^{|s| \log |s|} \ll e^{|s|}$$

3.

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx$$

$$|\zeta(s)| \leq \frac{|s|}{|s-1|} + |s| \int_1^\infty x^{-\mathcal{R}(s-1)} dx$$

$$\leq 2 + |s| \left[\frac{-1}{\mathcal{R}(s)} x^{-\mathcal{R}(s)} \right]_1^\infty$$

$$\leq 2 + |s| \frac{1}{\mathcal{R}(s)}$$

$$\zeta(s) \ll |s|$$

Et le résultat à partir de la définition de ξ et de la définition de l'ordre d'une fonction analytique (6.2.1). □

6.3 Décomposition de ξ

Théoreme 6.3.1. *On a, la convergence du produit étant uniforme sur tout compact,*

$$\xi(s) = e^{As+b} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

Démonstration. C'est la conséquence du théorème de décomposition de Weierstrass-Hadamard démontré en [D.5.12](#) et du résultat précédent [6.2.3](#). □

Chapitre 7

Egalité de Riemann-von Mangoldt

Rappelons que :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ a plusieurs facteurs distincts} \\ \log p & \text{si } n \text{ n'a que } p \text{ pour facteur} \end{cases}$$
$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Nous allons démontrer l'égalité suivante.

$$\psi(x) = x - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

Les résultats précédents indiquent deux décompositions en tant que produit infini pour ξ et ζ , l'un mettant en jeu les nombres premiers, l'autre les zéros de ζ . L'égalité ci dessus, qui implique les nombres premiers (via la fonction ψ) et les zéros de ζ (explicite-

ment), sera obtenue en calculant des deux façons correspondantes la somme :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s}$$

7.1 Dérivées logarithmiques de ξ et ζ

Lemme 7.1.1. *Pour $s \neq 2n$,*

$$\frac{(\Gamma(\frac{s}{2}))'}{\Gamma(\frac{s}{2})} = -\frac{1}{s} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{2i(2i+s)}$$

Démonstration. D'après la formule du produit pour Γ (C.2.6), si $-s \notin \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \frac{s}{i}) e^{-\frac{s}{i}}$$

Et :

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} e^{-\gamma s} \prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \frac{s}{i})^{-1} e^{\frac{s}{i}}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= \frac{(\frac{1}{s})'}{\frac{1}{s}} + \frac{(e^{-\gamma s})'}{e^{-\gamma s}} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{(\frac{i+s}{i})^{-1}'}{(\frac{i+s}{i})^{-1}} + \frac{(e^{\frac{s}{i}})' }{e^{\frac{s}{i}}} \right) \\ &= -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{i+s} + \frac{1}{i} \right) = -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{i(i+s)}\end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{(\Gamma(\frac{s}{2}))'}{\Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{s} - \gamma + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{i(2i+s)} \right) = -\frac{1}{s} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{2i(2i+s)}$$

□

Lemme 7.1.2.

$$\frac{(\pi^{-\frac{s}{2}})'}{\pi^{-\frac{s}{2}}} = -\frac{1}{2} \log \pi$$

Démonstration. Calcul élémentaire

□

Lemme 7.1.3.

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1-2s}{s(1-s)} - \frac{\log \pi}{2} - \frac{1}{s} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{2i(2i+s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &= -\frac{s(1-s)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) \\
 \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \frac{(s(1-s))'}{s(1-s)} + \frac{(\pi^{-\frac{s}{2}})'}{\pi^{-\frac{s}{2}}} + \frac{(\Gamma(\frac{s}{2}))'}{\Gamma(\frac{s}{2})} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\
 &= \frac{1-2s}{s(1-s)} - \frac{\log \pi}{2} - \frac{1}{s} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{2i(2i+s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\
 &= -\frac{1}{1-s} - \frac{\log \pi}{2} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{2i(2i+s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}
 \end{aligned}$$

□

Lemme 7.1.4. *Il existe une constante A telle que*

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = A + \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{s}{\rho(s-\rho)}$$

Démonstration. On utilise la formule 6.3.1 qui donne la décomposition de ξ ; on a, la convergence du produit étant uniforme sur tout compact :

$$\xi(s) = e^{As+b} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

Alors, la convergence de la somme sur les zéros n'étant pas forcément

uniforme :

$$\begin{aligned}
 \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \frac{(e^{As+b})'}{e^{As+b}} + \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \left(\frac{(1 - \frac{s}{\rho})'}{(1 - \frac{s}{\rho})} + \frac{(e^{\frac{s}{\rho}})' }{e^{\frac{s}{\rho}}} \right) \\
 &= A + \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \\
 &= A + \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{s}{\rho(s - \rho)}
 \end{aligned}$$

□

Lemme 7.1.5.

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = A + \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{s}{\rho(s - \rho)} + \frac{1}{1-s} - \frac{\log \pi}{2} + \frac{\gamma}{2} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s}{2i(2i+s)}$$

Démonstration. Découle des deux égalités précédentes. □

Lemme 7.1.6.

$$A = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\log \pi}{2} - 1$$

Démonstration. On fait $s = 0$. □

7.2 Intégrale de la dérivée logarithmique de ζ . (A)

Lemme 7.2.1.

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s} ds \right| < \frac{x^a}{\pi T |\log x|} \quad \text{pour } x < 1$$

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s} ds - 1 \right| < \frac{x^a}{\pi T |\log x|} \quad \text{pour } x > 1$$

Démonstration. 1. Si $x < 1$. On considère le contour représenté sur la gauche de la figure 7.1 avec $r(T) = T$. La fonction n'a pas de pôle intérieur. Les intégrales sur les segments en pointillé tendent vers 0 quand T tend vers l'infini :

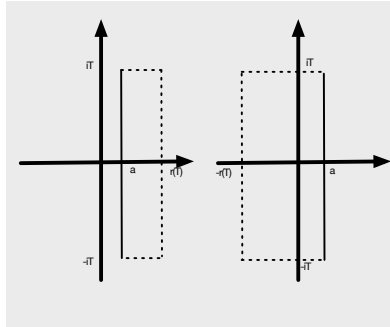


FIGURE 7.1 – Contours

a) On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a+iT}^{T+iT} \frac{x^s}{s} ds \right| &= \left| \int_a^T \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT} d\sigma \right| \\ &\leq \int_a^T \frac{|x^{\sigma+iT}|}{|\sigma+iT|} d\sigma \leq \int_a^{+\infty} \frac{x^\sigma}{T} d\sigma \\ &= \frac{x^a}{T|\log x|} \end{aligned}$$

b) De la même façon :

$$\left| \int_{T-iT}^{a-iT} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \frac{x^a}{T|\log x|}$$

c) Enfin :

$$\begin{aligned} \left| \int_{T+iT}^{T-iT} \frac{x^s}{s} ds \right| &= \left| \int_{-T}^T \frac{x^{T+it}}{T+it} dt \right| \leq \int_{-T}^T \left| \frac{x^{T+it}}{T+it} \right| dt \\ &\leq \int_{-T}^T \frac{x^T}{T} dt \leq 2T \frac{x^T}{T} = 2x^T \end{aligned}$$

Comme $x < 1$ cette expression tend vers 0.

2. Si $x > 1$. On considère le contour représenté sur la droite de la figure 7.1 avec $r(T) = -T$. La fonction a un pôle en 0. Le résidu est 1. Les intégrales sur les segments en pointillé tendent vers 0 quand T tend vers l'infini :

a) Comme précédemment :

$$\left| \int_{a+iT}^{-T+iT} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \frac{x^a}{T |\log x|}$$

b) Comme précédemment :

$$\left| \int_{-T-iT}^{a-iT} \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \frac{x^a}{T |\log x|}$$

c) Enfin

$$\begin{aligned} \left| \int_{-T-iT}^{-T-iT} \frac{x^s}{s} ds \right| &= \left| \int_{-T}^T \frac{x^{-T+it}}{T+it} dt \right| \leq \int_{-T}^T \left| \frac{x^{-T+it}}{-T+it} \right| dt \\ &\leq \int_{-T}^T \frac{x^{-T}}{T} dt \leq 2T \frac{x^{-T}}{T} = 2x^{-T} \end{aligned}$$

Comme $x > 1$ cette expression tend vers 0.

□

Lemme 7.2.2.

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Démonstration. Découle de 7.2.1.

□

Lemme 7.2.3. Avec $a > \mathcal{R}(\beta) > 0$, pour x réel, $x > 1$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\beta(s-\beta)} x^s ds = \frac{x^\beta}{\beta}$$

Démonstration. 1. On considère le contour représenté sur la droite de la figure 7.1 avec $r(T) = -T$.

2. La fonction a un pôle en β . Le résidu est x^β/β .
3. Les intégrales sur les segments en pointillé tendent vers 0 quand T tend vers l'infini :

a)

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{a+iT}^{-T+iT} \frac{1}{\beta(s-\beta)} x^s ds \right| &= \left| \int_a^T \frac{1}{\beta(\sigma+iT-\beta)} x^{\sigma+iT} d\sigma \right| \\
 &\leq \int_a^T \frac{1}{|\beta(\sigma+iT-\beta)|} \times |x^{\sigma+iT}| d\sigma \\
 &\leq \int_a^T \frac{1}{|\beta|T} x^\sigma d\sigma \leq \int_a^{+\infty} \frac{x^\sigma}{|\beta|T} d\sigma \\
 &= \frac{x^a}{T|\beta| \log x|}
 \end{aligned}$$

b) De même

$$\left| \int_{-T-iT}^{a-iT} \frac{1}{\beta(s-\beta)} x^s ds \right| \leq \frac{x^a}{T|\beta| \log x|}$$

c) Enfin

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-T+iT}^{-T-iT} \frac{1}{\beta(s-\beta)} x^s ds \right| &= \left| \int_T^{-T} \frac{1}{\beta(-T+it-\beta)} x^{-T+it} dt \right| \\
 &\leq \int_T^{-T} \left| \frac{1}{\beta(-T+it-\beta)} x^{-T+it} \right| dt \\
 &\leq \frac{1}{|\beta|} x^{-T} \int_T^{-T} \left| \frac{1}{-T+it-\beta} \right| dt \\
 &\leq \frac{1}{|\beta|} x^{-T} \int_T^{-T} \frac{1}{T} dt = \frac{2}{|\beta|} x^{-T}
 \end{aligned}$$

□

Lemme 7.2.4. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ et x demi-entier. Alors :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{ds}{s} - \psi(x) \right| < \left| \frac{x^{a+1}}{T} \frac{\zeta'(a)}{\zeta(a)} \right|$$

Démonstration. D'après 5.2.1

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_n \Lambda(n) n^{-s}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \sum_n \Lambda(n) n^{-s} \frac{ds}{s} \\
 &= \sum_n \Lambda(n) \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s}
 \end{aligned}$$

D'après 7.2.1, seconde partie :

$$\left| \sum_{n < x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} - 1 \right) \right| < \sum_{n < x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} \right)^a \frac{1}{\pi T |\log(\frac{x}{n})|}$$

D'après 7.2.1, première partie :

$$\left| \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} \right) \right| < \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} \right)^a \frac{1}{\pi T |\log(\frac{x}{n})|}$$

Donc en sommant et en utilisant la définition de $\psi(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s} \right) - \psi(x) \right| &= \left| \sum_n \Lambda(n) \frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} - \sum_{n < x} \Lambda(n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n < x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} - 1 \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^s \frac{ds}{s} \right) \right| \\ &\leq \sum_n \Lambda(n) \left(\frac{x}{n} \right)^a \frac{1}{\pi T |\log(\frac{x}{n})|} \\ &< \frac{x^a}{\pi T} \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^a} \frac{1}{|\log(\frac{x}{n})|} \end{aligned}$$

Comme x est demi entier, on a toujours :

$$|\log(\frac{x}{n})| < |\log(\frac{x}{x+1/2})| > \frac{1}{2x+1} > \frac{1}{3x} > \frac{1}{\pi x}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2\pi} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s} - \psi(x) \right| &< \frac{x^a}{\pi T} \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^a} \pi x \\
 &< \frac{x^{a+1}}{T} \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^a} \\
 &< \frac{x^{a+1}}{T} \left| \frac{\zeta'(a)}{\zeta(a)} \right|
 \end{aligned}$$

Et le résultat en faisant tendre t vers $+\infty$. □

Théoreme 7.2.5. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ et $x > 0$ demi-entier. Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{ds}{s} = \psi(x)$$

Démonstration. On fait tendre T vers $+\infty$. □

7.3 Intégrale de la dérivée logarithmique de ζ . (B)

Lemme 7.3.1. Pour $x > 1$,

$$\sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} = \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{1-x} &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \text{ pour } 0 < x < 1 \\ \log \frac{1}{1-x^{-2}} &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{-2n}}{n} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{x^{-2n}}{2n} \text{ pour } x > 1\end{aligned}$$

□

Lemme 7.3.2.

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} = x - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1-x^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

Démonstration. On développe :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} x^s \frac{ds}{s} \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{\rho(s-\rho)} x^s \frac{ds}{s} \\ &\quad + \sum_n \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} x^s \frac{ds}{s} \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{s-1} x^s \frac{ds}{s}\end{aligned}$$

En utilisant 7.2.2 et 7.2.3,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \frac{ds}{s} &= 1 \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{\rho(s-\rho)} x^s \frac{ds}{s} &= \frac{x^\rho}{\rho} \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{s}{2n(s+2n)} x^s \frac{ds}{s} &= \frac{x^{-2n}}{2n} \\ \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s-1} x^s ds &= x\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s} &= -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} + x \\ &= x - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\end{aligned}$$

□

7.4 Formule exacte de von Mangoldt

Théoreme 7.4.1.

$$\psi(x) = x - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

Démonstration. Découle des résultats précédents.

□

Chapitre 8

$\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) = 1$

Lemme 8.0.1. *On peut écrire :*

$$\log \zeta(s) = \sum_n a_n n^{-s}$$

où les coefficients a_n sont réels non négatifs.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log\left(\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum_p \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) \\ &= \sum_p \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p^{-sk} = \sum_n a_n n^{-s} \\ \text{avec } a_n &= \frac{1}{k} \text{ si } n = p^k, = 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Et la série est clairement convergente pour $\Re(s) > 1$. □

Lemme 8.0.2. *On a : $3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha \geq 0$*

Démonstration. $3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha = 2(1 + \cos \alpha)^2$ □

Lemme 8.0.3. Pour $\sigma > 1$, on a : $3 \log \zeta(\sigma) + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 0$

Démonstration. On choisit une détermination du logarithme telle que $\log |z| = \Re(\log z)$.

$$\begin{aligned} \Re(\log \zeta(\sigma + it)) &= \Re\left(\sum_n a_n n^{-\sigma - it}\right) = \sum_n a_n \Re(n^{-\sigma - it}) \\ &= \sum_n a_n n^{-\sigma} \cos(t \log n) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} S &= 3 \log \zeta(\sigma) + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| \\ &= 3 \log \zeta(\sigma) + 4 \Re(\log \zeta(\sigma + it)) + \Re(\log |\zeta(\sigma + 2it)|) \\ &= \sum_n a_n n^{-\sigma} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos 2t \log n) \geq 0 \text{ en utilisant } 8.0.1 \end{aligned}$$

□

Théoreme 8.0.4. Pour $t \neq 0$, $\zeta(1 + it) \neq 0$

Démonstration. La question a été résolue pour $t = 0$. Soit $t \neq 0$ tel que $\zeta(1 + it) = 0$. Soit $\sigma > 1$. D'après 8.0.2, on a :

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

Mais on a, avec des fonctions $a(\sigma, t)$, $b(\sigma, t)$, $c(\sigma, t)$ bornées dans

un voisinage de $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned}\zeta(\sigma) &= \frac{1}{\sigma - 1} + a(\sigma, t); \text{ déjà vu} \\ \zeta(\sigma + it) &= (\sigma - 1)b(\sigma, t) \text{ parce que } \zeta \text{ est holomorphe en } \sigma + it \\ \zeta(\sigma + 2it) &= (\sigma - 1)c(\sigma, t) \text{ parce que } \zeta \text{ est holomorphe en } \sigma + 2it\end{aligned}$$

Donc, avec une fonction $d(\sigma, t)$ bornée dans un voisinage de $\sigma = 1$, on peut écrire :

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| = (\sigma - 1)d(\sigma, t)$$

On obtient une contradiction en faisant tendre σ vers 1 □

Chapitre 9

Le théorème des nombres premiers

Rappelons encore une fois que :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ a plusieurs facteurs distincts} \\ \log p & \text{si } n \text{ n'a que } p \text{ pour facteur} \end{cases}$$
$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Lemme 9.0.1. *On a :*

$$\int_0^x \psi(t) dt \simeq \frac{x^2}{2}$$

Démonstration. 1. Avec la formule de von Mangoldt (7.4.1), on

peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^x \psi(t) dt &= \int_0^x \left(t - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{t^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - t^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \right) dt \\ &= \frac{x^2}{2} - \int_0^x \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{t^\rho}{\rho} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \log(1 - t^{-2}) dt - x \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \log(1 - t^{-2}) dt &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} x \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} &= 0\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^\rho}{\rho} &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^\rho}{\rho} = \frac{1}{x^2} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} = \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} \\ \left| \frac{1}{x^2} \int_0^x \sum_\rho \frac{t^\rho}{\rho} \right| &\leq \sum_\rho \frac{x^{\Re(\rho)-1}}{|\rho(\rho+1)|}\end{aligned}$$

D'après 4.2.2, la limite suivante existe :

$$L = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|}$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe T tel que :

$$\sum_{I(\rho) > T} \frac{1}{|\rho(1 + \rho)|} \leq \epsilon$$

Comme il n'y a pas de zéro de partie réelle 1 (8.0.4), il existe $r < 1$ tel que $\mathcal{R}(\rho) < r$ si $I(\rho) < T$. Soit x_0 tel que, pour $x > x_0$, on ait : $x^{r-1}L \leq \epsilon$. On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \frac{x^{\mathcal{R}(\rho)-1}}{|\rho(\rho+1)|} &= \sum_{I(\rho) \leq T} \frac{x^{\mathcal{R}(\rho)-1}}{|\rho(\rho+1)|} + \sum_{I(\rho) > T} \frac{x^{\mathcal{R}(\rho)-1}}{|\rho(\rho+1)|} \\ &\leq x^{rT-1} \sum_{I(\rho) \leq T} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|} + \epsilon \leq x^{r-1}L + \epsilon \leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\mathcal{R}(\rho)-1}}{|\rho(\rho+1)|} = 0$$

3. Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x \psi(t) dt - \frac{x^2}{2} \right) = 0$$

□

Théoreme 9.0.2.

$$\psi(x) \simeq x$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et X tel que pour $x \geq X$.

$$(1 - \epsilon) \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \psi(t) dt < (1 + \epsilon) \frac{x^2}{2}$$

Alors pour $y > x > X$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^y \psi(t) dt - \int_0^x \psi(t) dt &\geq (1 - \epsilon) \frac{y^2}{2} + (1 + \epsilon) \frac{x^2}{2} \\ &= (1 - \epsilon) \frac{y^2 - x^2}{2} + 2\epsilon \frac{x^2}{2} \\ \int_0^y \psi(t) dt - \int_0^x \psi(t) dt &\leq (1 + \epsilon) \frac{y^2 - x^2}{2} - 2\epsilon \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

ψ est croissante.

$$(y - x)\psi(x) \leq \int_x^y \psi(t) dt \leq (y - x)\psi(y)$$

$$\begin{aligned} (y - x)\psi(x) &\leq (1 + \epsilon) \frac{y^2 - x^2}{2} + 2\epsilon \frac{x^2}{2} \\ (y - x)\psi(y) &\geq (1 - \epsilon) \frac{y^2 - x^2}{2} - 2\epsilon \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Avec $y = \beta x$,

$$\begin{aligned} x(\beta - 1)\psi(x) &\leq (1 + \epsilon)x^2 \frac{\beta^2 - 1}{2} + 2\epsilon \frac{x^2}{2} \\ y(1 - \frac{1}{\beta})\psi(y) &\geq (1 - \epsilon)y^2(1 - \frac{1}{\beta^2}) - 2\epsilon \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(x) &\leq x(1 + \epsilon)\frac{\beta + 1}{2} + 2\epsilon\frac{x}{2(\beta - 1)} \\ \psi(y) &\geq y(1 - \epsilon)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta}\right) - 2\epsilon\frac{y}{2\beta(\beta - 1)}\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $x > X$ et tout $\beta > 1$, $y = \beta x$. On en déduit, en faisant tendre β vers 1, puis en prenant des ϵ de plus en plus petits que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = 0$$

□

Chapitre 10

Vers l'hypothèse de Riemann

Le but de ce chapitre est de développer les conséquences de l'hypothèse de Riemann et de démontrer que la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ est égale à la borne inférieure des nombres

1. α tels que $\psi(x) - x \in O(x^\alpha(\log x)^2)$
2. α tels que $\Theta(x) - x \in O(x^\alpha(\log x)^2)$
3. α tels que $\pi(x) - \int_2^x (1/\log u) du \in O(x^\alpha \log x)$

10.1 La croissance de ψ et la partie réelle des racines

Théorème 10.1.1. *Soit α le maximum des parties réelles des racines non triviales. Alors*

$$\psi(x) - x \in O\left(x^\alpha(\log x)^2\right)$$

Démonstration. On part de la formule de von Mangoldt (7.4.1) :

$$\psi(x) = x - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

On écrit, puisque ψ est une fonction positive et croissante :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq \int_x^{x+1} \psi(t) dt \\ &= \int_0^{x+1} \psi(t) dt - \int_0^x \psi(t) dt \\ &= \int_0^{x+1} \left(t - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{t^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - t^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \right) dt \\ &\quad - \int_0^x \left(t - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \frac{t^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log(1 - t^{-2}) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2} \left((x+1)^2 - x^2 \right) - \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\Im(\rho) < T} \left(\frac{(x+1)^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right) + K_0 \end{aligned}$$

parce que la fonction $\log(1 - x^{-2})$ est bornée. En résumé :

$$\psi(x) \leq x + \sum_{\rho} \left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| + K_1$$

Soit $\rho = \beta + i\gamma$, avec $\beta \leq \alpha$. Si $|\gamma| \leq x$, on a :

$$\left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| = \frac{1}{|\rho|} \left| \int_x^{x+1} t^\rho dt \right| \leq \frac{(x+1)^\beta}{|\rho|} \leq \frac{(2x)^\beta}{|\gamma|}$$

Si $|\gamma| > x$, on a :

$$\left| \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right| \leq \frac{2|x+1|^{\beta+1}}{|\rho(\rho+1)|} < \frac{2(2x)^{\beta+1}}{\gamma^2}$$

D'après 4.1.2, le nombre de racines avec $\gamma \in [t, t+1]$ est inférieur à $5 \log t$. On a :

$$\psi(x) \leq x + (2x)^\beta \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{1}{|\gamma|} + 2(2x)^{\beta+1} \sum_{|\gamma| \geq x} \frac{1}{\gamma^2} + K_1$$

On développe les sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma| \leq x} \frac{1}{|\gamma|} &\leq \sum_{n \leq [x]} \sum_{|\gamma| \in [n, n+1]} \frac{1}{|\gamma|} \leq \sum_{n \leq [x]} (5 \log n) \frac{1}{n} \leq 5 \int_1^x \frac{\log t}{t} dt \leq 5 \frac{(\log x)^2}{2} \\ \sum_{|\gamma| \geq x} \frac{1}{\gamma^2} &\leq \sum_n \sum_{|\gamma| \in [n, n+1]} \frac{1}{\gamma^2} \leq \sum_{n \leq [x]} (5 \log n) \frac{1}{n^2} \leq 5 \int_1^x \frac{\log t}{t^2} dt \leq 5 \frac{1 + \log x}{x} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\psi(x) \leq x + (2x)^\beta \left(5 \frac{(\log x)^2}{2} \right) + 2(2x)^{\beta+1} \left(\frac{1 + \log x}{x} \right) + K_1 \leq x + K_5 x^\beta (\log x)^2$$

En procédant exactement de la même façon avec :

$$\psi(x) \geq \int_{x-1}^x \psi(t) dt$$

On arrive à l'inégalité :

$$\psi(x) \geq x - K_6 x^\beta (\log x)^2$$

□

Théoreme 10.1.2. *S'il existe $\alpha \in]1/2, 1]$ tel que $\Theta(x) - x \in O(x^\alpha)$, alors $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ pour $\sigma > \alpha$.*

Démonstration. On a vu que :

$$\psi(x) = \Theta(x) + \Theta(x^{1/2}) + \dots + \Theta(x^{1/j})$$

avec $j = [\log x / \log 2]$. Puisque $\Theta(x) - x \in O(x^\alpha)$, on a :

$$\psi(x) - x - x^{1/2} \in O(x^\alpha + x^{\alpha/2} + x^{1/3} \log x)$$

Comme $\alpha > 1/2 > 2/5$, $\psi(x) - x - x^{1/2} \in O(x^\alpha)$. Enfin :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \int_1^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{x^s} \\
 &= \left[\frac{\psi(x)}{x^s} \right]_1^{+\infty} + s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} ds = s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} ds \\
 &= s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x - x^{\frac{1}{2}}}{x^{s+1}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^{s+1}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{s+1}} dx \\
 &= s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x - x^{\frac{1}{2}}}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{s-1} + \frac{s}{s-1/2}
 \end{aligned}$$

L'intégrale converge pour $\sigma > \alpha$. Donc $\zeta'(s)/\zeta(s)$ n'a pas de pôles et $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\sigma > \alpha$.

□

Théoreme 10.1.3. *La borne supérieure θ des parties réelles des zéros de la fonction ζ est égale à la borne inférieure des nombres*

1. α tels que $\psi(x) - x \in O(x^\alpha(\log x)^2)$
2. α tels que $\Theta(x) - x \in O(x^\alpha(\log x)^2)$
3. α tels que $\pi(x) - \int_2^x (1/\log u) du \in O(x^\alpha \log x)$

Démonstration. Découle de [10.1.1](#), [10.1.2](#) et des équivalences [5.4.1](#).

□

10.2 Hypothèse de Riemann

Théoreme 10.2.1. *La borne supérieure θ des parties réelles des zéros de la fonction ζ est égale à $1/2$*

Démonstration. A venir.

□

Annexe A

Rappel : Fonctions analytiques et fonctions holomorphes

A.1 Fonctions holomorphes

Definition A.1.1. Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** dans un ouvert $O \subset \mathbb{C}$ si elle est dérivable en tant que fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: pour $z_0 \in O$, la limite suivante existe et est finie,

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

A.2 Intégrales des fonctions holomorphes sur un chemin

Definition A.2.1. Un **chemin différentiable** est une application différentiable $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Definition A.2.2. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ différentiable. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On pose :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Lemme A.2.3. Soit C le cercle de rayon r .

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2i\pi$$

Démonstration. $\gamma(t) = re^{2i\pi t}$. $\gamma'(t) = r2i\pi e^{2i\pi t}$

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{re^{2i\pi t}} r2i\pi e^{2i\pi t} dt = 2i\pi \int_0^1 dt$$

□

Lemme A.2.4. Soit L un segment : $\gamma(t) = (1 - t)z_0 + tz_1$. Soit $p(z) = az + b$ affine. Alors :

$$\int_L p(z)dz = \frac{1}{2}a(z_1^2 - z_0^2) + b(z_1 - z_0)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \int_L p(z)dz &= \int_0^1 p(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
 &= \int_0^1 (a((1-t)z_0 + tz_1) + b)(z_1 - z_0)dt \\
 &= a(z_1 - z_0)^2 \int_0^1 (t) dt + (z_1 - z_0)(az_0 + b) \int_0^1 (1) dt \\
 &= \frac{1}{2}a(z_1 - z_0)^2 + (z_1 - z_0)(az_0 + b) \\
 &= \frac{1}{2}a(z_1^2 + 2z_0z_1 + z_0^2) + a(z_0z_1 - z_0^2) + b(z_1 - z_0) \\
 &= \frac{1}{2}a(z_1^2 - z_0^2) + b(z_1 - z_0)
 \end{aligned}$$

□

Definition A.2.5. *Un chemin différentiable par morceaux est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ qui est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]t_i, t_{i+1}[$.*

Definition A.2.6. *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin différentiable par morceaux. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On pose :*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Lemme A.2.7. *Soit P un polygone fermé. $f(z) = az + b$ affine.*

$$\int_{\partial P} f(z)dz = 0$$

Démonstration. On écrit $\partial P = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_0)$ et on applique [A.2.4.](#) □

Théoreme A.2.8. *Soit T un triangle. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant T . Alors :*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

Démonstration. On pose $T_0 = T$. On divise le triangle en 4 triangles semblables (figure [A.1](#)). Si le plus grand côté de T_0 a pour longueur $l/2$, celui de T_1 a pour longueur $l/2$. Il existe un des sous triangles,

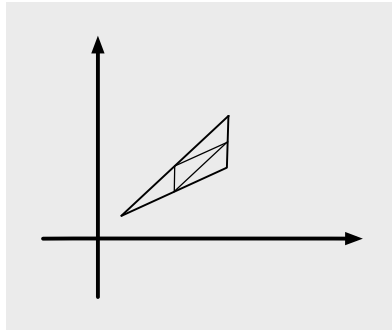


FIGURE A.1 – Décomposition d'un triangle en quatre triangles semblables

soit T' tel que $\left| \int_{\partial T'} f(z) dz \right| \geq \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| / 4$. Soit T_1 ce triangle. On construit ainsi une suite de triangles qui vérifient : T_n est inclus

dans T_{n-1} , son plus grand côté a pour longueur $l_n = l/2^n$ et :

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right|$$

Soit $z_0 = \bigcap_n T_n$. f est holomorphe en z_0 . On peut écrire, avec $\lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| = 0$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe η tel que $|g(z)| \leq \epsilon/(8l^2)$ pour $|z - z_0| \leq \eta$. Soit n tel que $l_n \leq 2\eta$. Sur le bord de T_n , on a $|z - z_0| \leq 2l_n \leq \eta$. La fonction $z \rightarrow f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ étant affine, en utilisant A.2.7, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_n} f(z) dz &= \int_{\partial T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)) dz \\ &= \int_{\partial T_n} g(z)(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial T_n} g(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq \text{périmètre}(T_n) \times \text{Max}|g(z)| \times \text{Max}|z - z_0| \\ &\leq 3\left(\frac{l}{2^n}\right) \times \frac{\epsilon}{8l^2} \times 2\left(\frac{l}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n \epsilon.$$

On a donc, avec les équations A.1 et A.1 :

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \left(\frac{1}{4} \right)^n \epsilon = \epsilon$$

Cette intégrale est nulle parce qu'aussi petite que possible. □

Definition A.2.9. On dit que f a une **primitive** dans un ouvert U s'il existe g holomorphe dans U tel que $g'(z) = f(z)$

Lemme A.2.10. Si f a une primitive g dans un ouvert U , alors pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0))$$

Démonstration. On écrit :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 (g \circ \gamma)'(t) dt = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0))$$

□

Lemme A.2.11. Soit U un ouvert convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, une application holomorphe. Les énoncés suivants ont équivalents :

1. La fonction f a une primitive dans U

2. Pour tout triangle T contenu dans U

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). On utilise [A.2.10](#) avec les côtés successifs du triangle.

(2) $\Rightarrow$ (1) On considère un point z_0 dans U et on note $\gamma_{z_0, z}$, le segment de droite allant de z_0 à z . On pose :

$$g(z) = \int_{\gamma_{z_0, z+h}} f(z)dz$$

Soit T_h le triangle de sommets $z_0, z, z+h$. Comme U est un ouvert convexe, il contient T_h tout entier pourvu que h soit assez petit. En appliquant le théorème [A.2.8](#), il vient :

$$g(z+h) - g(z) = \int_{\gamma_{z, z+h}} f(z)dz = \int_0^1 f(z+th)hdt$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(z+th)dt \\ &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} f(z+th)dt = \int_0^1 f(z)dt = f(z) \end{aligned}$$

□

Lemme A.2.12. *Si f est holomorphe sur U ouvert convexe, f a une primitive.*

Démonstration. C'est la conséquence de A.2.8 et de A.2.11. $\square$

Théoreme A.2.13. *Soit f holomorphe dans U convexe. Soit γ un chemin fermé inclus dans U . Alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Démonstration. Comme le chemin est fermé, on a : $\gamma(0) = \gamma(1)$. On utilise les lemmes A.2.10 et A.2.12. $\square$

Théoreme A.2.14. *Soit f holomorphe dans un ouvert contenant le disque C de centre a et de rayon r . Alors*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Démonstration. On considère les chemins représentés sur la figure A.2. D'après le théorème A.2.13, les intégrales sur les lignes droites se compensent. C_r est parcouru dans le sens inverse et défini par :

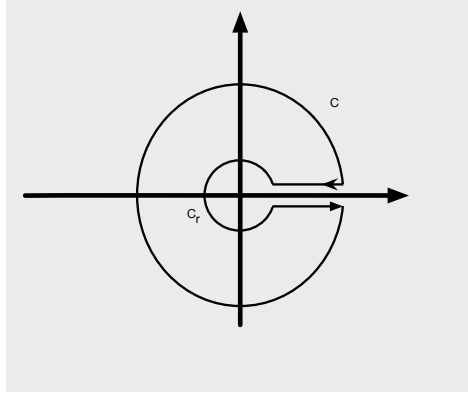


FIGURE A.2 – Cercles concentriques. Le petit cerce est de rayon r .

$\gamma(t) = a + re^{-2i\pi t}$, Donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz \\
 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(a + re^{-2i\pi t})}{re^{-2i\pi t}} \times (-2ri\pi e^{-2i\pi t}) dt \\
 &= \int_0^1 f(a + re^{-2i\pi t}) dt = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 f(a + re^{-2i\pi t}) dt \\
 &= \int_0^1 \lim_{r \rightarrow 0} f(a + re^{-2i\pi t}) dt = f(a)
 \end{aligned}$$

□

A.3 Fonctions analytiques

Définition A.3.1. Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est **analytique** en $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un voisinage O de z_0 dans lequel $f(z)$ est somme d'une série convergente : pour $|z - z_0| < r$, on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Théorème A.3.2. Si f est analytique en z_0 , elle est holomorphe dans un voisinage O de z_0

Démonstration. On considère la série $g(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n (z - z_0)^{n-1}$. Il est clair qu'elle a le même rayon de convergence que f . Et qu'alors $f'(z) = g(z)$. $\square$

Théorème A.3.3. Si f est holomorphe dans $O \subset \mathbb{C}$, elle est analytique en tout $z_0 \in O$.

Démonstration. Soit C le disque de centre z_0 et de rayon r . Pour z tel que $|z - z_0| < r/2$ et u sur le cercle C , on a : $|z - z_0| < r/2 < |u - z_0| < r$. On a :

$$\frac{1}{u - z} du = \frac{1}{u - z_0 - z + z_0} = \frac{1}{(u - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{u - z_0})} = \frac{1}{u - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n$$

Alors :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(u)}{u - z} du = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(u)}{u - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n du = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$$

Comme $|(u - z_0)| = r$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_C |f(u)| du < \frac{M}{r^n}$$

Et le rayon de convergence est $\geq r$. □

A.4 Zéros isolés et prolongement analytique

Lemme A.4.1. *Si f est analytique, $f(z_0) = 0$, alors ou bien $f(z) = 0$ dans un voisinage de z_0 , ou bien, il existe un voisinage de z_0 dans lequel $f(z) \neq 0$ pour tout $z \neq z_0$.*

Démonstration. Dans un voisinage de z_0 : $f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k (z - z_0)^k$. Si pour tout k , $a_k = 0$ alors $f(z) = 0$ dans ce voisinage. Sinon, soit $h \geq 1$ le plus petit entier tel que $a_h \neq 0$. On a : $f(z) = (z - z_0)^h g(z)$ avec g analytique et $g(z_0) \neq 0$. Donc $f(z) \neq 0$ dans un voisinage de z_0 . □

Théoreme A.4.2. *Soit f analytique dans un ouvert connexe U . S'il existe une suite $\mathcal{Z} = \{z_n\}$ tels que (a) $\mathcal{Z}$ a une infinité d'éléments différents, (b) $\mathcal{Z}$ est contenue dans un compact $K \subset U$, (c) $f(z_n) = 0$, alors f est nulle sur tout V .*

Démonstration. Soit z_a un point d'accumulation de $\mathcal{Z}$. On applique [A.4.1](#) à z_a . □

Corollaire A.4.3. *Soit f définie sur un ouvert O et g définie sur un ouvert U . Si $O \cap U \neq \emptyset$, si $f(z) = g(z)$ pour $z \in O \cap U$, alors on peut prolonger f et g sur $O \cup U$.*

Démonstration. Evidente d'après le lemme précédent. □

A.5 Maximum d'une fonction holomorphe

Théoreme A.5.1. Principe du maximum. *Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe U . Alors $|f|$ n'admet pas de maximum local sur U .*

Démonstration. Supposons que z_0 est un maximum local. Soit C le bord d'un petit disque $B(z_0, r)$ autour de z_0 : on a $|f(z)| < |f(z_0)|$ pour $|z - z_0| \leq r$

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{2i\pi t})}{re^{2i\pi t}} 2i\pi r e^{2i\pi t} dt \\ &= \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t}) dt \end{aligned}$$

Donc

$$|f(z_0)| \leq \int_0^1 |f(z_0 + re^{2i\pi t})| dt \leq \int_0^1 |f(z_0)| dt = |f(z_0)|$$

□

Corollaire A.5.2. *Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe U . Alors le maximum de $|f|$ sur un compact inclus dans U se trouve sur la frontière de ce compact.*

Lemme A.5.3. *Lemme de Schwarz. Soit f holomorphe dans un ouvert contenant le disque centre 0 et de rayon 1, telle que $f(0) = 0$ et $f(z) \leq 1$ pour $|z| \leq 1$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour $|z| \leq 1$ et $|f'(0)| \leq 1$.*

Démonstration. On applique le principe du maximum à la fonction holomorphe $g(z) = f(z)/z$. Pour tout $r < 1$, g atteint son maximum sur le disque $D(0, r)$ en un point du cercle $C(0, r)$: il existe z_r tel que $|z_r| = 1$ et $|g(z)| < |g(z_r)|$. Mais on a $|g(z_r)| = |f(z_r)/z_r| \leq |f(z_r)|/|z_r| \leq 1/r$. On fait tendre r vers 1. Pour $z \leq 1$, on a $|g(z)| \leq 1$, soit $|f(z)| \leq |z|$. On obtient que $|f'(0)| \leq 1$ en écrivant que $f'(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z = \lim_{z \rightarrow 0} g(z)$. $\square$

Lemme A.5.4. *Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ analytique dans un ouvert contenant le disque de centre 0 et de rayon R . Soit $M = \sup_{|z|=R} |f(z)|$. Alors*

$$|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{M}{R^n}$$

Démonstration. Cette inégalité a été vue lors de la démonstration de A.3.3. $\square$

Théoreme A.5.5. Théorème de de la partie réelle. *Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ analytique dans un ouvert contenant le disque de centre 0*

et de rayon R . Soit de plus $M = \sup_{|z|=R} \Re(f(z))$. Alors, pour $n \geq 1$, on a :

$$|a_n| \leq 2 \frac{M - \Re(f(0))}{R^n}$$

Démonstration. Puisque $n \geq 1$, on peut opérer une translation et se ramener au cas où $\Re(f(z_0)) > 0$. On écrit $a_n = |a_n|e^{i\phi_n}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_n a_n z^n = \sum_n |a_n| e^{i\phi_n} z^n \\ f(Re^{i\phi}) &= \sum_n |a_n| e^{i(\phi_n + n\phi)} R^n \\ \Re(f(Re^{i\phi})) &= \sum_n |a_n| R^n \cos(\phi_n + n\phi) \end{aligned}$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$; on définit :

$$I(n, m) = \int_0^{2\pi} \cos(\phi_n + n\phi) \cos(\phi_m + m\phi) d\phi$$

Alors, pour $n = m$, $I(n, n) = \pi$. Pour $n \neq m$, $I(m, n) = 0$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\begin{aligned} S_m &= \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{i\phi})) \cos(\phi_m + m\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_n |a_n| R^n \cos(\phi_n + n\phi) \cos(\phi_m + m\phi) d\phi \\ &= \sum_n |a_n| R^n I(n, m) = \sum_n |a_n| R^n 2\pi \delta_{n,m} = 2\pi |a_m| R^m \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 T_m &= \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{i\phi}))(1 + \cos(m\phi + \phi_m))d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{i\phi}))d\phi + \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{i\phi})) \cos(m\phi + \phi_m)d\phi \\
 &= 2\pi\Re(f(0)) + \pi|a_m|R^m
 \end{aligned}$$

Et comme : $0 \leq 1 + \cos(\phi_m + m\phi)$

$$\begin{aligned}
 T_m &= \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{i\phi}))(1 + \cos(m\phi + \phi_m))d\phi \\
 &\leq \int_0^{2\pi} M (1 + \cos(m\phi + \phi_m)) d\phi \\
 &\leq 2\pi M
 \end{aligned}$$

Finalement

$$2\pi\Re(f(0)) + \pi|a_m|R^m \leq 2\pi M$$

Et

$$|a_m| \leq 2 \frac{M - \Re(f(0))}{R^m}$$

□

Lemme A.5.6. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ analytique dans un ouvert contenant le disque de centre z_0 et de rayon R . Soit $M = \sup_{|z|=R} \Re(f(z))$.

Alors, pour $|z - z_0| = r < R$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq 2(M - \Re(f(0))) \frac{R}{R - r}$$

Démonstration. On applique [A.5.5](#) :

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n \geq 1} |a_n| r^n \\ &\leq \sum_{n \geq 1} 2 \frac{M - \Re(f(0))}{R^n} r^n \\ &= 2(M - \Re(f(0))) \frac{r}{R - r} \end{aligned}$$

□

Lemme A.5.7. Soit $g(z)$ holomorphe inversible pour $|z - z_0| \leq R$. Si $|g(z)/g(z_0)| \leq M$ pour $|z - z_0| = R$, alors pour $|z - z_0| = r < R$, on a :

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq \frac{2R \log M}{(R - r)^2}$$

Démonstration. On applique la première inégalité de [A.5.6](#) à une détermination de $\log(g(z)/g(z_0))$. □

A.6 Zéros des fonctions holomorphes

Lemme A.6.1. Soit $f(z)$ holomorphe pour $|z - z_0| \leq R$ et, comme précédemment, tel que $|f(z)/f(z_0)| \leq M$ pour $|z - z_0| = R$. Soient

ρ les zéros de f dans le disque $|z - z_0| \leq R/2$. Alors pour $|z - z_0| \leq r < R/2$, on a :

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} \right| \leq \frac{R \log M}{(R/2 - r)^2}$$

Démonstration. On applique A.5.7 à $g(z) = f(z) \prod_{\rho} (z - \rho)^{-1}$.

$$\begin{aligned} \frac{g(z)}{g(z_0)} &= \frac{f(z)}{f(z_0)} \prod_{\rho} \frac{z_0 - \rho}{z - \rho} \\ \left| \frac{z_0 - \rho}{z - \rho} \right| &\leq 1 \text{ lorsque } |z - z_0| = R \\ \left| \frac{g(z)}{g(z_0)} \right| &\leq M \\ \frac{g'(z)}{g(z)} &= \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\rho} \frac{1}{z - \rho} \end{aligned}$$

□

Théoreme A.6.2. Théorème de Borel. Soit f une fonction holomorphe dans le disque de centre s_0 et de rayon R . Soient, comptés avec leurs multiplicités, $s_1, \dots, s_m$ les zéros de f dans le disque de centre s_0 et de rayon $r < R$. Soit $M = \sup_{|s - s_0| = R} |f(s)|$. Si $f(s_0) \neq 0$, on a :

$$\left(\frac{R}{r} \right)^m \leq \frac{M}{|f(s_0)|}$$

Démonstration. Pour $|s - s_0| = R$, on a

$$\left| \frac{R^2 - (s - s_0)(\overline{s_k} - \overline{s_0})}{R(s - s_k)} \right| = 1$$

En effet

$$\begin{aligned} \left| \frac{R^2 - (s - s_0)(\overline{s_k} - \overline{s_0})}{R(s - s_k)} \right|^2 &= \frac{R^4 - 2R^2\mathcal{R}(s)(s - s_0)(\overline{s_k} - \overline{s_0}) + |s - s_0|^2|s_0 - s_k|^2}{R^2|s - s_k|^2} \\ &= \frac{|s - s_0|^2 - 2\mathcal{R}((s - s_0)(\overline{s_k} - \overline{s_0})) + |s_0 - s_k|^2}{|s - s_k|^2} \end{aligned}$$

Et

$$|s - s_k|^2 = |s - s_0 + s_0 - s_k|^2 = |s - s_0|^2 - 2\mathcal{R}((s - s_0)(\overline{s_k} - \overline{s_0})) + |s_0 - s_k|^2$$

On pose

$$g(s) = f(s) \prod_{k=1}^m \frac{R^2 - (s - s_0)(\overline{s_k} - \overline{s_0})}{R(s - s_k)}$$

Alors $g(s)$ est holomorphe dans le disque $|s - s_0| \leq R$ et $|g(s)| = |f(s)|$ pour $|s - s_0| = R$. Donc $|g(s)| \leq M$ pour $|s - s_0| \leq R$. En

particulier

$$\begin{aligned} M &\geq |g(s_0)| \\ &= |f(s_0)| \prod_{k=1}^m \left| \frac{R^2}{R(s_0 - s_k)} \right| = |f(s_0)| \prod_{k=1}^m \frac{R}{|s_0 - s_k|} \\ &\geq |f(s_0)| \prod_{k=1}^m \frac{R}{r} \geq |f(s_0)| \left(\frac{R}{r} \right)^m \end{aligned}$$

□

Annexe B

Rappel : Fonctions méromorphes

B.1 Définition

Définition B.1.1. Soit O un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ est *méromorphe* si elle est le quotient de deux fonctions holomorphes : $f(z) = g(z)/h(z)$.

Théoreme B.1.2. Si f est méromorphe en $z_0 \in O \subset \mathbb{C}$, alors on peut écrire :

$$f(z) = \sum_{n \geq -n_0} a_n (z - z_0)^n$$

Démonstration. On a : $f(z) = g(z)/h(z)$ autour de z_0 .

Si $h(z_0) \neq 0$, elle n'est pas nulle dans un disque contenant z_0 ;

$f(z)$ est dérivable de dérivée

$$\frac{h(z)g'(z) - h'(z)g(z)}{h(z)^2}$$

Donc elle y est holomorphe, donc y est analytique.

Si $h(z_0) = 0$, on écrit $h(z) = (z - z_0)^{n_0}k(z)$ avec k analytique, $k(z) \neq 0$ dans un disque contenant z_0 . On applique le même principe à $k(z)$, et on obtient le résultat cherché. $\square$

B.2 Zéros et pôles

Definition B.2.1. Soit f une fonction méromorphe : $f(z) = g(z)/h(z)$. Un **pôle d'ordre** n est un point z_0 tel que $h(z) = (z - z_0)^n k(z)$, $k(z_0) \neq 0$ et $h(z_0) \neq 0$. Un **zéro d'ordre** n est un point z_0 tel que $g(z) = (z - z_0)^n k(z)$, $k(z_0) \neq 0$ et $k(z_0) \neq 0$.

Lemme B.2.2. Soit f holomorphe sur un ouvert contenant le disque C . Soit $n(f)$ le nombre de zéros de f contenus dans C , comptés avec leurs multiplicités. Alors :

$$n(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Démonstration. On écrit :

$$f(z) = g(z) \prod_i (z - z_i)^{n_i}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_i n_i \frac{1}{z - z_i}$$

□

Lemme B.2.3. *Soit f méromorphe sur un ouvert contenant le disque C . Soit $n(f)$ le nombre de zéros de f contenus dans C , comptés avec leurs multiplicités. Soit $p(f)$ le nombre de pôles de f contenus dans C , comptés avec leurs multiplicités. Alors :*

$$n(f) - p(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Démonstration.

$$f(z) = g(z) \prod_i (z - z_i)^{n_i} / \prod_j (z - p_j)^{m_j}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_i n_i \frac{1}{z - z_i} - \sum_j m_j \frac{1}{z - p_j}$$

□

Lemme B.2.4. *Sous les mêmes hypothèses, $p(f) - n(f)$ est égal à la variation de l'argument de $f(z)$ le long de C , exprimé en tours.*

Démonstration. Lemme précédent

□

B.3 Résidus

Definition B.3.1. Soit f méromorphe avec un pôle en z_0 . Soit C un cercle autour z_0 qui ne contient pas d'autre pôle de f . Le **résidu** de f en z_0 est :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)$$

Lemme B.3.2. Soit f méromorphe avec un pôle en z_0 et dont le développement analytique est $f(z) = \sum_{n \geq -n_0} a_n (z - z_0)^n$ avec $n_0 \geq -1$. Alors

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_C (z - z_0)^n dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 (re^{2i\pi t})^n \times (2i\pi r e^{2i\pi t}) dt \\ &= r^{n+1} \int_0^1 e^{2i\pi(n+1)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 1 & \text{si } n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z) dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_C \sum_{n \geq -n_0} a_n (z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n \geq -n_0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_C a_n (z - z_0)^n dz \right) = a_{-1} \end{aligned}$$

□

Lemme B.3.3.

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \text{ pour } z_0 \text{ pôle d'ordre } 1.$$

Démonstration. On écrit $f(z) = g(z)/h(z)$ avec $h(z_0) = 0$. La fonction $k(z) = (z - z_0)f(z)$ est analytique; elle s'écrit : $k(z) = \sum_{i \geq 0} b_i(z - z_0)^i$ et le résidu cherché est b_0 .

$$\begin{aligned} b_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} k(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) / \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \end{aligned}$$

□

Lemme B.3.4.

$$\text{Res}\left(\frac{g'}{g}, z_0\right) = n \text{ pour } z_0 \text{ zéro de } g \text{ d'ordre } n$$

Démonstration. On écrit $g(z) = (z - z_0)^n h(z)$ avec $h(z_0) \neq 0$. Alors

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{n}{z - z_0}$$

□

Définition B.3.5. *L'indice d'un point z_0 par rapport à un chemin γ*

est donné par :

$$Ind_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

C'est le nombre tours que fait γ autour de z . $Ind_{\gamma}(z_0) = 0$ si z est à l'extérieur de γ .

Théoreme B.3.6. *Théorème des résidus. Soit f méromorphe dans U simplement connexe. Soit γ un chemin contenu dans U . Soit z_k les pôles de f à l'intérieur de U . Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_k Res(f, z_k) Ind_{\gamma}(z_k)$$

Démonstration. 1. Soit z_k le k -ième pôle de f .

2. Soit $\sum_{i \geq -n_k} a_i^k (z - z^k)^i$ le développement de f en z_k .

3. Soit $g_k(z) = \sum_{i \geq -n_k}^{-1} a_i^k (z - z^k)^i$.

4. Soit $g(z) = f(z) - \sum_k g_k(z)$.

5. La fonction g est holomorphe parce qu'elle a, en tout point sauf aux pôles, un développement analytique ; et aux pôles, il suffit de développer les expressions de f et des g_k pour avoir le résultat.

6. U étant simplement connexe :

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 0$$

7. Donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_k \int_{\gamma} g_k(z) dz$$

8. Mais

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g_k(z) dz &= \int_{\gamma} \sum_{i \geq -n_k}^{-1} a_i^k (z - z^k)^i dz = \sum_{i \geq -n_k}^{-1} a_i^k \int_{\gamma} (z - z^k)^i dz \\ &= a_{-1}^k \int_{\gamma} (z - z^k)^{-1} dz = \text{Res}(f, z_k) \text{Ind}_{\gamma}(z_k) \end{aligned}$$

9. D'où le résultat.

□

Annexe C

Rappel : Fonctions spéciales

C.1 Fonctions trigonométriques

Definition C.1.1.

$$\cos(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n} \quad \sin(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} z^{2n+1}$$

On obtient toutes les formules trigonométriques :

Lemme C.1.2.

$$\begin{aligned}
 e^{iz} &= \cos(z) + i \sin(z) \\
 e^{2ik\pi} &= 1 \\
 \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
 \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
 \cos'(z) &= -\sin(z) \\
 \sin'(z) &= \cos(z)
 \end{aligned}$$

Démonstration. Les premières égalités viennent immédiatement des définitions. Les dernières découlent du principe de prolongement analytique : elles sont vraies sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas discret dans $\mathbb{C}$. $\square$

Lemme C.1.3.

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Démonstration. Soit k un entier donné assez grand pour que l'on ait : $1 > \tanh(\pi k) > 1/2$ et $-1 < \tanh(-\pi k) < -1/2$. On considère alors le bord du rectangle $ABCD$ où $A = (k + \frac{1}{2} + ik)$, $B = (k + \frac{1}{2} - ik)$,

$C = (-k - \frac{1}{2} - ik)$, $D = (-k - \frac{1}{2} + ik)$. Soit $w \notin \mathbb{Z}$. On définit :

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^2 - w^2}$$

Et l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

1. Posant $z = x + iy$, on a :

$$\cos \pi(x + iy) = \cos \pi x \cosh \pi y - i \sin \pi x \sinh \pi y$$

$$\sin \pi(x + iy) = \sin \pi x \cosh \pi y + i \cos \pi x \sinh \pi y$$

2. On en déduit que $|\cot \pi z| < 2$ pour $z \in \gamma_k$:

$$\begin{aligned} \cot \pi(k + \frac{1}{2} + iy) &= \frac{\cos \pi(k + \frac{1}{2} + iy)}{\sin \pi(k + \frac{1}{2} + iy)} \\ &= \frac{\cos \pi(k + \frac{1}{2}) \cosh \pi y - i \sin \pi(k + \frac{1}{2}) \sinh \pi y}{\sin \pi(k + \frac{1}{2}) \cosh \pi y + i \cos \pi(k + \frac{1}{2}) \sinh \pi y} \\ &= -i \frac{\sin \pi(k + \frac{1}{2}) \sinh \pi y}{\sin \pi(k + \frac{1}{2}) \cosh \pi y} \text{ parce que } \cos \pi(k + \frac{1}{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$|\cot \pi(k + \frac{1}{2} + iy)| \leq |\tanh \pi y| \leq 2$$

$$\begin{aligned}
 \cot \pi(x + ik) &= \frac{\cos \pi(x + ik)}{\sin \pi(x + ik)} \\
 &= \frac{\cos \pi x \cosh \pi k - i \sin \pi x \sinh \pi k}{\sin \pi x \cosh \pi k + i \cos \pi x \sinh \pi k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\cot \pi(x + ik)|^2 &= |\cot \pi(x - ik)|^2 \\
 &= \frac{(\cos \pi x)^2 + (\sin \pi x)^2 (\tanh \pi k)^2}{(\sin \pi x)^2 + (\cos \pi x)^2 (\tanh \pi k)^2} \\
 &\leq \frac{(\cos \pi x)^2 + (\sin \pi x)^2}{(\sin \pi x)^2 + (\cos \pi x)^2 (1/2)^2} \\
 &\leq \frac{(\cos \pi x)^2 + (\sin \pi x)^2}{(\sin \pi x)^2 (1/2)^2 + (\cos \pi x)^2 (1/2)^2} \\
 &\leq 4
 \end{aligned}$$

3. Alors :

$$\left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right| \leq 2 \left| \int_{\gamma_k} \frac{\pi}{z^2 - w^2} dz \right|$$

En examinant la situation sur les différents segments de γ_k :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{AB} \frac{\pi}{z^2 - w^2} dz \right| &= \left| \int_k^{-k} \frac{\pi}{(k + 1/2 + iy)^2 - w^2} dy \right| \\
 \left| \int_{BC} \frac{\pi}{z^2 - w^2} dz \right| &= \left| \int_{k+1/2}^{-k-1/2} \frac{\pi}{(x + ik)^2 - w^2} dx \right|
 \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a un intervalle de longueur de l'ordre de

k et une fonction en valeur absolue de l'ordre de $1/k^2$ On en déduit que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0.$$

4. Les pôles de f à l'intérieur de γ_k sont : $z = w, z = w, z = n$, les entiers $n \in [-k, k]$.
5. Les résidus correspondants sont :

$$\frac{\pi \cot w}{2w}, \frac{-\pi \cot w}{-2w}, \frac{1}{n^2 - w^2}$$

6. On applique le théorème [B.3.6](#) (théorème des résidus)

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} f(z) dz = \frac{\pi \cot w}{2w} + \frac{-\pi \cot w}{-2w} + \sum_{n=-k}^k \frac{1}{n^2 - w^2}$$

7. On a le résultat en faisant tendre k vers l'infini.

□

Lemme C.1.4.

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right)$$

Démonstration. On pose

$$h(z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2} \right)$$

On prend les dérivées logarithmiques de $h(z)$ et $\sin \pi z$:

$$\frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{\tan \pi z}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{h'(z)}{h(z)} &= \frac{(\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}))'}{(\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}))} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \frac{z^2}{n^2})'}{(1 - \frac{z^2}{n^2})} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{2z}{n^2})}{(1 - \frac{z^2}{n^2})} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \\ &= \frac{\pi}{\tan \pi z} \text{ d'après C.1.3} \end{aligned}$$

Donc, avec une constante C :

$$\sin \pi z = Ch(z)$$

Mais

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z)}{\pi z} = 1$$

Donc $C = 1$

□

C.2 Gamma

Définition C.2.1. Pour s complexe tel que : $\Re(s) > 1$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$$

L'intégrale converge car $|t^{s-1}| = t^{\Re(s)-1}$.

Lemme C.2.2. Pour s complexe tel que : $\Re(s) > 1$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

Démonstration. : intégration par partie.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s+1} \frac{dt}{t} = \left[-e^{-t} s t^{s-1} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} s t^{s-1} dt = s\Gamma(s)$$

□

Théoreme C.2.3. Γ peut être étendue à $\mathbb{C}$ tout entier par la relation $\Gamma(s) = \Gamma(s+1)/s$. La fonction Γ obtenue est telle que $\Gamma(1) = 1$. Elle a des pôles simples en 0 et aux entiers négatifs.

Démonstration. 1. Valeur en 1.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

2. Γ a des pôles simples en 0 et aux entiers négatifs : $\Gamma(1) = 0 \times \Gamma(0)$, puis $\Gamma(0) = (-1) \times \Gamma(-1)$, $\Gamma(-1) = (-2) \times \Gamma(-2)$, etc.

□

Lemme C.2.4. *Pour s réel, positif.*

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt$$

Démonstration. On sait que :

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

Mais :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= e^{n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)} \\ &\leq e^{n\left(-\frac{t}{n}\right)} \text{ parce que } \log(1 - x) \leq -x \text{ pour } 0 \leq x < 1 \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

La convergence est dominée. Donc uniforme. On peut inverser les sommations et limites :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \mathbb{I}_{[0,n]}(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \mathbb{I}_{[0,n]}(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \end{aligned}$$

□

Lemme C.2.5. Pour s réel, positif.

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \dots (s+n)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt &= n^s \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{s-1} d\tau = n^s \frac{n}{s} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^s d\tau \\ &= n^s \frac{n}{s} \frac{n-1}{s+1} \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \tau^{s+1} d\tau \\ &\dots \\ &= n^s \frac{n}{s} \frac{n-1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n-1} \int_0^1 (1-\tau)^0 \tau^{n+s-1} d\tau \\ &= n^s \frac{n}{s} \frac{n-1}{s+1} \dots \frac{1}{s+n-1} \times \frac{1}{s+n} = n^s \frac{n!}{s(s+1) \dots (s+n)} \end{aligned}$$

□

Lemme C.2.6. Pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{i}\right) e^{-\frac{s}{i}}$$

Démonstration. Pour s réel, positif.

$$\begin{aligned}
 \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt &= n^s \frac{n!}{s(s+1) \dots (s+n)} = \frac{n^s}{s(1+s)(1+\frac{s}{2}) \dots (1+\frac{s}{n})} \\
 &= \frac{e^{s \log n}}{s(1+s)(1+\frac{s}{2}) \dots (1+\frac{s}{n})} \times \frac{e^{-s(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}}{e^{-s(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}} \\
 &= \frac{e^{s(\log n - (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}))}}{s(1+s)e^{-s(\frac{1}{1})}(1+\frac{s}{2})e^{-s(\frac{1}{2})} \dots (1+\frac{s}{n})e^{-s(\frac{1}{n})}} \\
 \Gamma(s) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\gamma s}}{s \prod_{i=1}^n (1 + \frac{s}{i}) e^{-s(\frac{1}{i})}}
 \end{aligned}$$

Pour tout s complexe, $\prod_{i=1}^{+\infty} (1 + \frac{s}{i}) e^{-\frac{s}{i}}$ converge, donc :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{i}\right) e^{-\frac{s}{i}}$$

□

Lemme C.2.7. *Formule des compléments.* Pour tout u complexe :

$$\Gamma(u)\Gamma(1-u) = \frac{\pi}{\sin \pi u}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(u)\Gamma(-u)} &= u e^{\gamma u} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{i}\right) e^{-\frac{u}{i}} \times (-u) e^{\gamma(-u)} \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{-u}{i}\right) e^{-\frac{-u}{i}} \\
 &= -u^2 \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{u^2}{i^2}\right) \\
 \Gamma(1-u) &= -u\Gamma(-u) \\
 \sin(\pi u) &= \pi u \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{u^2}{i^2}\right)
 \end{aligned}$$

□

Lemme C.2.8.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Démonstration. On fait $u = 1/2$ dans la formule des compléments.

□

Définition C.2.9. Pour $\mathcal{R}(u) > 0$, $\mathcal{R}(v) > 0$,

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt$$

Lemme C.2.10. Pour $\mathcal{R}(u) > 0$, $\mathcal{R}(v) > 0$,

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

Démonstration.

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{v-1} ds = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t+s)} t^{u-1} s^{v-1} dt ds$$

On fait le changement de variable : $t = xy$, $s = x(1 - y)$, $x = t + s$,
 $y = t/(t + s)$

$$J = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 - y & -x \end{vmatrix} = -x$$

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{u-1} y^{v-1} x^{v-1} (1 - y)^{v-1} x dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{u+v-1} dx \int_0^1 y^{v-1} (1 - y)^{v-1} dy = \Gamma(u + v) B(u, v) \end{aligned}$$

□

Lemme C.2.11. Pour $\mathcal{R}(u) > 0$, $\mathcal{R}(v) > 0$,

$$B(u, v) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{2u-1} (\sin \phi)^{2v-1} d\phi$$

Démonstration.

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{2u-1} (1 - t)^{2v-1} dt$$

Changement de variable : $t = \cos^2 \phi$, $dt = -2 \cos \phi \sin \phi d\phi$

$$\begin{aligned} B(u, v) &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos \phi)^{2(u-1)} (\sin \phi)^{2(v-1)} 2 \cos \phi \sin \phi d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{2u-1} (\sin \phi)^{2v-1} d\phi \end{aligned}$$

□

Lemme C.2.12. *Formule de duplication. Pour tout u complexe :*

$$\Gamma(u) \Gamma(u + \frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2u)}{2^{2u}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} B(z, z) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{2z-1} (\sin \phi)^{2z-1} d\phi = 2 \times 2^{1-2z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\phi)^{2z-1} d\phi \\ &= 2^{1-2z} \int_0^{\pi} (\sin \tau)^{2z-1} d\tau = 2^{1-2z} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \tau)^{2z-1} d\tau \end{aligned}$$

$$B(\frac{1}{2}, z) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi)^{2z-1} d\phi$$

$$B(z, z) = 2^{1-2z} B(\frac{1}{2}, z)$$

$$\frac{\Gamma(z) \Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z + \frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

□

C.2.1 Formule de Stirling

Lemme C.2.13. 1. On pose, pour $x > 0$, $\phi(x) = x - 1 - \ln(x)$.

2. On pose $\rho(x) = (x - 1)^2/2$.

3. $\phi'(x) = 1 - 1/x$, $\phi'(1) = 0$, $\phi(1) = 0$, $\phi(x) \geq 0$;

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty$.

5. On a : $\rho'(1) = 0$, $\rho(1) = 0$.

6. Sur $[0, 1]$, $\phi(x) > \rho(x)$ et $0 < 1 - e^{-s(\phi(x) - \rho(x))} < 1$.

7. Sur $[1, +\infty]$, $x - 1 < \phi(x) < \rho(x)$ et $0 < 1 - e^{-s(\rho(x) - \phi(x))} < 1$.

Démonstration. Calculs immédiats

□

Théoreme C.2.14. Formule de Stirling

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s$$

Démonstration. 1. Par définition, pour $\Re(s) > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

On fait le changement de variable : $t = sx$

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= s^s \int_0^\infty x^{s-1} e^{-sx} dx \\ &= s^s e^{-s} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-s(x-1)} dx \\ &= s^s e^{-s} \int_0^\infty e^{-s\phi(x)} dx\end{aligned}$$

2. On fait le changement de variable suivant, qui est possible parce que $\Re(s) > 0$: $u = \sqrt{s}(x-1)$, $x = 1 + \frac{u}{\sqrt{s}}$:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s}}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} dx &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^\infty e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} dx &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} dx &= 0\end{aligned}$$

3. Il reste à montrer que la différence :

$$\int_0^\infty e^{-s\phi(x)} dx - \int_{-\infty}^\infty e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} dx$$

tend vers 0 lorsque s tend vers l'infini. On la réécrit :

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-s\phi(x)} - e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} \right) dx - \int_{-\infty}^0 e^{-s\frac{(x-1)^2}{2}} dx$$

On a déjà vu que la seconde intégrale tendait vers 0.

4. En ce qui concerne la première. On la décompose : $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$.

5. Sur $[0, 1]$, on a : $0 < 1 - e^{-s(\phi(x)-\rho(x))} < 1$, $(x-1)^2 \leq (1-x)$,
 $e^{-\Re(s)\frac{(x-1)^2}{2}} < e^{-\Re(s)\frac{1-x}{2}}$ et

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left(e^{-s\rho(x)} - e^{-s\phi(x)} \right) dx \right| &= \int_0^1 e^{-\Re(s)\rho(x)} \times \left(1 - e^{-\Re(s)(\phi(x)-\rho(x))} \right) dx \\ &\leq \int_0^1 e^{-\Re(s)\rho(x)} dx = \int_0^1 e^{-\Re(s)\frac{(x-1)^2}{2}} dx \\ &\leq \int_0^1 e^{-\Re(s)\frac{1-x}{2}} dx = \frac{2 - 2e^{-\Re(s)/2}}{\Re(s)} \leq \frac{2}{\Re(s)} \end{aligned}$$

6. Sur $[1, +\infty]$, on a : $0 < 1 - e^{-s(\rho(x)-\phi(x))} < 1$ et

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{+\infty} \left(e^{-s\phi(x)} - e^{-s\rho(x)} \right) dx \right| &= \int_1^{+\infty} e^{-\Re(s)\phi(x)} \times \left(1 - e^{-\Re(s)(\rho(x)-\phi(x))} \right) dx \\ &\leq \int_1^{+\infty} e^{-\Re(s)\phi(x)} dx \\ &\leq \int_1^{+\infty} e^{-\Re(s)(x-1)} dx = \frac{1}{\Re(s)} \end{aligned}$$

□

C.3 Theta

Definition C.3.1.

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x} \\ \Theta(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x}\end{aligned}$$

Lemme C.3.2.

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= 2\theta(x) + 1 \\ \theta(x) &= \frac{\Theta(x) - 1}{2}\end{aligned}$$

Démonstration. Evidente. □

Lemme C.3.3. θ est indéfiniment dérivable à décroissance rapide.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\theta^{(k)}(x) &= \sum_{n \geq 1} (-n^2 \pi)^k e^{-n^2 \pi x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \theta^{(k)}(x) &= 0\end{aligned}$$

□

Lemme C.3.4. *Formule de Poisson.* Soit ϕ indéfiniment dérivable à

décroissance rapide. Soit $\hat{\phi}$ sa transformée de Fourier. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n)$$

Démonstration. On pose $\psi(x) = \sum_n \phi(x+n)$. ψ est bien définie et continue, étant données les hypothèses sur ϕ . ψ est périodique de période 1. C'est la somme de sa série de Fourier :

$$\psi(x) = \sum_k a_k e^{-2i\pi kx}$$

avec

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 \psi(x) e^{-2i\pi kx} dx = \int_0^1 \sum_n \phi(x+n) e^{-2i\pi kx} dx \\ &= \sum_n \int_0^1 \phi(x+n) e^{-2i\pi kx} dx = \sum_n \int_n^{n+1} \phi(t) e^{-2i\pi k(t-n)} dt \\ &= \sum_n \int_n^{n+1} \phi(t) e^{-2i\pi kt} dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-2i\pi kt} dt = \hat{\phi}(k) \end{aligned}$$

On fait $x = 0$.

$$\psi(0) = \sum_n \phi(n) = \sum_k a_k e^{2i\pi k0} = \sum_k a_k = \sum_k \hat{\phi}(k)$$

□

Lemme C.3.5. Soit $t > 0$. Soit $\phi(x) = e^{-\pi t x^2}$. Sa transformée de

Fourier est

$$\hat{\phi}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{i x y} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (x^2 - \frac{i x y}{\pi t})} dx \\ &= e^{\pi t (\frac{i y}{2\pi t})^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t (x - \frac{i x y}{2\pi t})^2} dx \\ &= e^{\frac{-\pi y^2}{t}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i \frac{y}{2\sqrt{t}}}^{+\infty + i \frac{y}{2\sqrt{t}}} e^{-\pi u^2} \frac{1}{\sqrt{t}} du \text{ avec } u = \sqrt{t}(x - i \frac{y}{2\pi t}), du = \sqrt{t} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}} \text{ parce que } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i c}^{+\infty + i c} e^{-\pi u^2} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} du = 1 \end{aligned}$$

En effet, :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T+ic}^{+T+ic} e^{-\pi u^2} du = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-T+ic}^{-T} + \int_{-T}^{+T} + \int_{+T}^{+T+ic} \right)$$

Et

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{T+ic} e^{-\pi u^2} du \right| &\leq \int_0^c \left| e^{-\pi(-iu+T)^2} \right| du \\ &= \int_0^c \left| e^{-\pi(u^2+T^2)} \right| du \leq c e^{-\pi(T^2)} \end{aligned}$$

□

Lemme C.3.6.

$$\Theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\Theta(x)$$

Démonstration. On applique la formule de Poisson à la fonction ϕ ci-dessus :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(n) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n) \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right) &= \Theta(t) \end{aligned}$$

□

Lemme C.3.7.

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \theta(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)$$

Démonstration.

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\Theta\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{2} = \frac{\sqrt{x}\Theta(x) - 1}{2} = \frac{\sqrt{x}(2\theta(x) + 1) - 1}{2} = \theta(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)$$

□

Lemme C.3.8.

$$\frac{1}{2} + \theta(1) + 4\theta'(1) = 0$$

Démonstration. On dérive.

$$\begin{aligned}\left(\theta\left(\frac{1}{x}\right)\right)' &= \left(\theta(x)\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)\right)' \\ \frac{-1}{x^2}\theta'\left(\frac{1}{x}\right) &= \theta'(x)\sqrt{x} + \theta(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}\end{aligned}$$

On fait $x = 1$

$$-\theta'(1) = \theta'(1) + \theta(1)\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Ce qui est bien le résultat cherché.

□

Annexe D

Formules de Jensen et factorisation des fonctions holomorphes d'ordre 1

D.1 Fonctions harmoniques

Théoreme D.1.1. *Egalités de Cauchy-Riemann. Soit f holomorphe dans un voisinage de z_0 . Si on écrit : $z = x + iy$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, alors :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$f(z) - f(z_0) = f'(z)(z - z_0) + \dots$$

En tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &\quad + i(x - x_0) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + i(y - y_0) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \dots \end{aligned}$$

Si $f'(z) = a + ib$, on a :

$$\begin{aligned} (a + ib)(x - x_0 + i(y - y_0)) + \dots &= a(x - x_0) - b(y - y_0) \\ &\quad + i(a(y - y_0) + b(x - x_0)) + \dots \end{aligned}$$

Donc, en égalisant les développements au premier ordre :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ b &= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

□

Théoreme D.1.2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on écrit : $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si u et v sont dérivables et vérifient les égalités de Cauchy-Riemann, f est holomorphe.

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k) \\ &= f(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + ih \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + ik \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + o(h, k) \end{aligned}$$

Les égalités de Cauchy-Riemann sont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + ih \frac{\partial v}{\partial x} + ik \frac{\partial v}{\partial y} &= (h+ik) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= (h+ik) i \left(-i \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (h+ik) \left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Donc : $g = (1/2)(\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y)$ est la dérivée de f . Et f est holomorphe. □

Notation D.1.3. Pour $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, on note les opérateurs

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{df}{d\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}$$

Lemme D.1.4. *Si f est holomorphe, alors*

$$\frac{d\Re(f)}{d\bar{z}} = \frac{d\Im(f)}{d\bar{z}} = 0$$

Démonstration. Développer. □

Notation D.1.5. *Pour $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, on note l'opérateur :*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d}{dz} \frac{df}{d\bar{z}} = \frac{d}{d\bar{z}} \frac{df}{dz}$$

Définition D.1.6. *$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si $\Delta f = 0$.*

Lemme D.1.7. *$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si $\Re(f)$, $\Im(f)$ sont harmoniques.*

Démonstration. Découle de D.1.1. □

Lemme D.1.8. *Soient u, v continûment dérivables de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, où U est un ouvert simplement connexe. Il existe une fonction w de U dans $\mathbb{R}$ tel que $\partial w / \partial x = u$ et $\partial w / \partial y = v$ si et seulement si $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$*

Démonstration. 1. Si un tel w existe, alors

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Supposons que $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$,

- a) Soit $(x_0, y_0), (x, y) \in U$ tels que le carré de diagonale $(x_0, y_0), (x, y)$ soit inclus dans U ; on pose

$$w(x, y) = \int_{y_0}^y v(x_0, y') dy' + \int_{x_0}^x u(x', y) dx'$$

- b) Cette fonction a les dérivées voulues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) &= u(x, y) \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) &= v(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x', y)}{\partial y} dx' \\ &= v(x_0, y) + \int_{x_0}^x \frac{\partial v(x', y)}{\partial x} dx' = v(x, y) \end{aligned}$$

- c) Lorsque (x, y) est tel que le carré de diagonale $(x_0, y_0), (x, y)$ n'est pas contenu dans U , on construit un chemin constitué d'une suite $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ telle que $(x_n, y_n) = (x, y)$ et que les carrés de diagonale $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ soient inclus dans U . On définit alors :

$$\begin{aligned} w(x_0, y_0) &= 0 \\ w(x_{i+1}, y_{i+1}) &= w(x_i, y_i) + \int_{y_i}^{y_{i+1}} v(x_i, y') dy' + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x', y_{i+1}) dx' \end{aligned}$$

- d) Cette fonction a, elle aussi, les dérivées voulues
e) U étant simplement connexe, s'il y a deux chemins allant de (x_0, y_0) à (x, y) , ils sont homotopes. La somme en question ne dépend pas du chemin.

□

Théoreme D.1.9. *Une fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

D'après D.1.8, il existe g tel que $\partial g / \partial y = \partial f / \partial x$ et $\partial g / \partial x = -\partial f / \partial y$. Alors $f + ig$ satisfait les équations de Cauchy Riemman et est holomorphe. □

Lemme D.1.10. *Si f est harmonique sur un voisinage du disque unité*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

Démonstration. Découle de la formule intégrale de Cauchy et de D.1.9. □

Lemme D.1.11. *Pour toute fonction holomorphe f , sur un ouvert où f ne s'annule pas, on a :*

$$\frac{d}{dz} \log |f(z)| = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \log |z| &= \frac{d}{dz} \log \sqrt{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \log z\bar{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \log z + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \log \bar{z} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \log(x+iy) + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \log(x-iy) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+iy} - i \frac{i}{x+iy} + \frac{1}{x-iy} - i \frac{-i}{x-iy} \right) \\
 &= \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}
 \end{aligned}$$

Et donc :

$$\frac{d}{dz} \log |f(z)| = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

□

Lemme D.1.12. *Si f est holomorphe sur un voisinage du disque unité et ne s'y annule pas, alors, $\log |f(z)|$ y est harmonique*

Démonstration. Comme f' est aussi holomorphe et que $df'(z)/d\bar{z} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 \Delta \log |f(z)| &= \frac{d}{d\bar{z}} \frac{d}{dz} \log |f(z)| \\
 &= \frac{d}{d\bar{z}} \frac{f'(z)}{f(z)} = \left(\left(\frac{df'(z)}{d\bar{z}} \right)^2 - f(z) \frac{df'(z)}{d\bar{z}} \right) / (f(z)^2) = 0
 \end{aligned}$$

□

Lemme D.1.13. *Sous les mêmes conditions,*

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

Démonstration. Découle de [D.1.10](#) et de [D.1.12](#). □

D.2 Transformation de Moëbius

Définition D.2.1. *Soit z tel que $|z| < 1$. On considère la fonction*

$$h_z(w) = \frac{w + z}{\bar{z}w + 1}$$

Lemme D.2.2. *C'est une bijection holomorphe du disque unité sur lui même.*

Démonstration. 1. On a :

$$|h_z(w)|^2 = \frac{|w|^2 + |z|^2 + 2\Re(w\bar{z})}{|w|^2|z|^2 + 2\Re(\bar{z}w) + 1}$$

2. h_z applique le cercle unité sur lui même :

$$|h_z(w)| = 1 \text{ si } |w| = 1$$

3. h_z applique l'intérieur du disque unité sur lui même :

$$\begin{aligned}
 1 - |h_z(w)|^2 &= \frac{|w|^2|z|^2 + 2\mathcal{R}(\bar{z}w) + 1 - |w|^2 - |z|^2 - 2\mathcal{R}(w\bar{z})}{|w|^2|z|^2 + 2\mathcal{R}(\bar{z}w) + 1} \\
 &= \frac{|w|^2|z|^2 + 1 - |w|^2 - |z|^2}{|w|^2|z|^2 + 2\mathcal{R}(\bar{z}w) + 1} \\
 &\geq \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|w|^2|z|^2 - 2|w||z| + 1} = \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{(|w||z| - 1)^2} \\
 &> 0 \text{ si } |w| < 1 \text{ parce que } |z| < 1 \\
 &< 0 \text{ si } |w| > 1 \text{ parce que } |z| < 1
 \end{aligned}$$

4. h_z est inversible d'inverse g_z :

$$g_z(v) = \frac{v - z}{1 - \bar{z}v}$$

5. g_z applique le disque unité sur lui-même. Même démonstration.

□

D.3 Formule de Jensen

Lemme D.3.1. *Soit f holomorphe sur un voisinage du disque de rayon 1, n'ayant pas de zéro sur la frontière ce disque. Soient z_i les zéros de f à l'intérieur du disque unité. Si $f(0) \neq 0$, alors on a :*

$$\log |f(0)| - \sum_j \log |z_j| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

Démonstration. On remarque que, pour $|z| = 1$:

$$\left| \frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right|^2 = \frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \times \frac{1 - z_j \bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_j} = \frac{1 + |z|^2 |z_j|^2 - 2\mathcal{R}(\bar{z}_j z)}{|z|^2 + |z_j|^2 - 2\mathcal{R}(\bar{z}_j z)} = 1$$

On applique [D.1.13](#)

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

à la fonction :

$$g(z) = f(z) \prod_j \frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j}$$

□

Théoreme D.3.2. *Soit f holomorphe sur un voisinage du disque de rayon r , n'ayant pas de zéro sur la frontière ce disque. Soient z_i les zéros de f à l'intérieur du disque unité. Si $f(0) \neq 0$, alors :*

$$\log |f(0)| - \sum_j \log \left| \frac{z_j}{r} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

Démonstration. On fait une homothétie de rapport r et on applique [D.3.1](#). □

Lemme D.3.3. *Soit f holomorphe sur un voisinage du disque de rayon 1, n'ayant pas de zéro sur la frontière ce disque. Soient z_i les zéros de f à l'intérieur du disque unité. Si z est tel que $|z| < 1$ et*

$f(z) \neq 0$, alors :

$$\log |f(z)| - \sum_j \log \left| \frac{z_j - z}{1 - \bar{z}_j z} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\theta$$

Démonstration. On considère la fonction

$$g(w) = f(h_z(w))$$

Les $w_j = h_z^{-1}(z_j)$ sont les zéros de g . On applique D.3.2 à g .

$$\log |g(0)| - \sum_j \log |w_j| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| d\theta$$

On a :

$$h_z(C) = C$$

On fait le changement de variables

$$\begin{aligned} e^{i\mu} &= h_z(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + z}{\bar{z}e^{i\theta} + 1} \\ e^{i\theta} &= g_z(e^{i\mu}) = \frac{e^{i\mu} - z}{1 - \bar{z}e^{i\mu}} \\ ie^{i\theta} d\theta &= i \frac{e^{i\mu} - z}{1 - \bar{z}e^{i\mu}} d\theta = \frac{ie^{i\mu}(1 - z\bar{z})}{(-1 + e^{i\mu}\bar{z})^2} d\mu \\ d\theta &= \frac{1 - |z|^2}{(z - e^{-i\mu})(z - e^{i\mu})} d\mu = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{-i\mu}|^2} d\mu \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\mu})| \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\mu}|^2} d\mu$$

Et :

$$\log |f(z)| - \sum_j \log \left| \frac{z_j - z}{1 - \bar{z}z_j} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\theta$$

□

Théoreme D.3.4. *Soit f holomorphe sur un voisinage du disque de rayon r , n'ayant pas de zéro sur la frontière ce disque. Soient z_i les zéros de f à l'intérieur du disque unité. Si z est tel que $|z| < r$ et $f(z) \neq 0$, alors :*

$$\log |f(z)| - \sum_j \log \left| \frac{z_j - z}{r - \bar{z}z_j/r} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{r - |z|^2}{|z - re^{i\theta}|^2} d\theta$$

Démonstration. On utilise [D.3.3](#) et on fait une homothétie de rapport r . □

D.4 Ordre d'une fonction analytique

Définition D.4.1. *Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ est d'ordre 1 si pour tout ϵ , il existe M vérifiant : pour $|z| > M$, on a :*

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{1+\epsilon}}$$

Lemme D.4.2. *Si f est d'ordre 1, avec un zéro d'ordre m en 0, si $g(z) = f(z)/z$ avec $g(0) \neq 0$. Alors g est aussi d'ordre 1.*

Démonstration. Soit M' correspondant à $\epsilon/2$. La croissance de l'exponentielle étant plus rapide que celle du logarithme, il existe M'' tel que $\log |z| \leq \frac{1}{m}|z|^{1+\epsilon/2}(|z|^{\epsilon/2} - 1)$ pour $|z| > M''$. Soit $M = \sup(M', M'')$. Alors pour $|z| > M$

$$|g(z)| = |f(z)| \times |z^m| \leq e^{|z|^{1+\epsilon/2}} e^{m \log |z|} \leq e^{|z|^{1+\epsilon/2} + m \log |z|} \leq e^{|z|^{1+\epsilon}}$$

□

D.5 Produit d'Hadamard

Dans toute cette partie, f est une fonction holomorphe d'ordre 1. Soient $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ les zéros de f classés par valeur absolue croissante. On note $n(r)$ le nombre de zéros $z_j \leq r$.

Lemme D.5.1. *On a :*

$$j \leq n(|z_j|)$$

Démonstration. Par définition. □

Lemme D.5.2. *Soit $\epsilon > 0$, il existe M tel que, pour $r \geq M$, on ait :*

$$n(r/2) \log 2 \leq 2r^{1+\epsilon}$$

Démonstration. Soit ϵ et M' la valeur correspondant à ϵ dans la définition D.4.1. Soit M'' tel que $|\log |f(0)|| \leq r^{1+\epsilon}$ pour $r > M''$. Pour $r \geq M = \max(M', M'')$, on a, en appliquant la formule de Jensen à f :

$$\begin{aligned} \log |f(0)| - \sum_{z_j \leq r} \log \left| \frac{z_j}{r} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log e^{r^{1+\epsilon}} d\theta \leq r^{1+\epsilon} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{z_j \leq r} \log \left| \frac{r}{z_j} \right| \leq r^{1+\epsilon} + \log |f(0)| \leq 2r^{1+\epsilon}$$

Mais

$$\sum_{z_j \leq r} \log \left| \frac{r}{z_j} \right| \geq \sum_{z_j \leq r/2} \log \left| \frac{r}{z_j} \right| \geq \sum_{z_j \leq r/2} \log 2 \geq n(r/2) \log 2$$

□

Lemme D.5.3. Soit $\epsilon > 0$, il existe M et N tels que, pour $r \geq M$, on ait :

$$n(r) \leq Nr^{1+\epsilon}$$

Démonstration. On fait une homothétie de rapport 2 et on applique D.5.2.

□

Lemme D.5.4. *Pour $|z_j| > M$*

$$|z_j| \geq j^{\frac{1}{1+\epsilon}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} j &\leq n(|z_j|) \text{ d'après D.5.1} \\ &\leq |z_j|^{1+\epsilon} \text{ pour } |z_j| > M \\ |z_j| &> j^{\frac{1}{1+\epsilon}} \text{ en inversant l'inégalité} \end{aligned}$$

□

Lemme D.5.5.

$$S = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{|z_j| < r} \left| \frac{1}{z_j} \right|^2 < +\infty$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{|z_j| < r} \left| \frac{1}{z_j} \right|^2 &= \sum_{0 < |z_j| \leq M} \left| \frac{1}{z_j} \right|^2 + \sum_{M < |z_j| < r} \left| \frac{1}{z_j} \right|^2 \\ &\leq \sum_{0 < |z_j| \leq M} \left| \frac{1}{z_j} \right|^2 + \sum_j \frac{1}{j^{\frac{2}{1+\epsilon}}} < +\infty \text{ parce que } \frac{2}{1+\epsilon} > 1 \end{aligned}$$

□

Lemme D.5.6.

$$\sum_r \frac{n(r)}{r^2} < +\infty$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{n(r)}{r^2} &= \sum_r \sum_{r < |z_j| \leq (r+1)} \frac{1}{r^2} = \sum_r \sum_{r < |z_j| (r+1)} \frac{(r+1)^2}{r^2} \frac{1}{(r+1)^2} \\ &\leq \sum_r \sum_{r < |z_j| (r+1)} 2^2 \frac{1}{(r+1)^2} \leq \sum_r \sum_{r < |z_j| (r+1)} 2^2 \frac{1}{|z_j|^2} \\ &\leq 2^2 \sum_j \frac{1}{|z_j|^2} < +\infty \end{aligned}$$

□

Lemme D.5.7. *Pour tout z , il y a convergence de*

$$\prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j}$$

et cette convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration. Soit K un compact et $z \in K$.

$$\begin{aligned} \log \left(\prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j} \right) &= \sum_j \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right) \\ \left| \sum_j \log \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right| &\leq \sum_{|z_j| \leq 2|z|} \left| \log \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right| + \sum_{|z_j| > 2|z|} \left| \log \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right| \end{aligned}$$

La première somme est bornée indépendamment de $z \in K$:

$$\sum_{|z_j| \leq 2|z|} \left| \log\left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right| \leq \sum_{|z_j| \in 2K} \left| \log\left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right|$$

La seconde également :

$$\begin{aligned} \sum_{|z_j| > 2|z|} \left| \log\left(1 - \frac{z}{z_j}\right) + \frac{z}{z_j} \right| &\leq \frac{1}{2} \sum_{|z_j| > 2|z|} \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{z_j}\right|} \left|\frac{z}{z_j}\right|^2 \text{ d'après D.5.10} \\ &\leq \frac{2|z|^2}{2} \sum_{|z_j| > 2|z|} \left|\frac{1}{z_j}\right|^2 \text{ parce que } 1 - \left|\frac{z}{z_j}\right| \geq \frac{1}{2} \\ &< |z|^2 S \text{ d'après D.5.5} \\ &< +\infty \text{ indépendamment de } z \in K \end{aligned}$$

□

Définition D.5.8. On pose :

$$h(z) = f(z) / \left(z^m \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j} \right)$$

Lemme D.5.9. On peut écrire

$$h(z) = e^{g(z)}$$

Démonstration. h n'a pas de pôles. On peut en prendre un logarithme. □

Lemme D.5.10. Pour $|z| < 1$, on a :

$$|\log(1 - z) + z| \leq \frac{|z|^2}{2} \frac{1}{1 - |z|}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \log(1 - z) &= - \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} \\ |\log(1 - z) + z| &\leq \left| \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \right| \leq \frac{1}{2} |z^2 + z^3 + \dots| \leq \frac{|z|^2}{2} |1 + z + z^2 + \dots| \\ &\leq \frac{|z|^2}{2} \left| \frac{1}{1 - z} \right| \leq \frac{|z|^2}{2} \frac{1}{1 - |z|} \end{aligned}$$

□

Lemme D.5.11. $g(z)$ est un polynôme de degré 1

Démonstration. On peut supposer que $m = 0$.

1. D'une part :

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{z/z_j}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f'}{f}(z) &= \frac{(e^{g(z)})'}{e^{g(z)}} + \sum_j \frac{(1 - \frac{z}{z_j})'}{1 - \frac{z}{z_j}} + \sum_j \frac{(e^{z/z_j})'}{e^{z/z_j}} \\
 &= g^{(1)}(z) - \sum_j \frac{1}{z - z_j} + \sum_j \frac{1}{z_j} (z/z_j)' \\
 &= g^{(1)}(z) - \sum_j \left(\frac{1}{z - z_j} - \frac{1}{z_j^2} \right)
 \end{aligned}$$

Et en dérivant une fois de plus :

$$\left(\frac{f'}{f} \right)^{(1)}(z) = g^{(2)}(z) + \sum_j \frac{1}{(z - z_j)^2}$$

2. D'autre part, on a la formule de Poisson-Jensen :

$$\log |f(z)| - \sum_{|z_j| < r} \log \left| \frac{z_j - z}{r - \bar{z}z_j/r} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{r - |z|^2}{|z - re^{i\theta}|^2} d\theta$$

3. On la dérive par rapport à $\bar{z}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\bar{z}} \log |f(z)| &= \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ d'après D.1.11} \\
 \frac{d}{d\bar{z}} \log \left| \frac{z_j - z}{r - \bar{z}z_j/r} \right| &= -\frac{1}{z - z_j} + \frac{\bar{z}_j}{z\bar{z}_j - r^2} \\
 \frac{d}{d\bar{z}} \frac{r - |z|^2}{|z - re^{i\theta}|^2} &= \frac{2re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^2}
 \end{aligned}$$

4. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f}(z) = & - \sum_{|z_j| < r} \frac{1}{z - z_j} + \sum_{|z_j| < r} \frac{\bar{z}_j}{z\bar{z}_j - r^2} \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{2re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^2} d\theta \end{aligned}$$

5. On dérive cette égalité par rapport à z :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f'}{f}\right)^{(1)}(z) = & \sum_{|z_j| < r} \frac{-1}{(z - z_j)^2} - \sum_{|z_j| < r} \frac{-2\bar{z}_j^2}{(z - z_j)^2} \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{4re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^3} d\theta \end{aligned}$$

6. On fait tendre r vers $+\infty$. Soit

$$m_r = 1 + \max_{|z|=r} |f(z)|$$

On prend r assez grand pour que $r > 2|z|$ et que $m_r < e^{r^{1+\epsilon}}$.

Alors :

$$\left| \frac{re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^3} \right| < \frac{2}{r^2}$$

7. On a $r > 2|z|$. Pour $|z_j| < r$:

$$\left| \frac{\bar{z}_j^2}{(z - z_j)^2} \right| = \frac{|z_j|^2}{(r^2 - |z_j|/r)^2} \leq r^2$$

8. D'après D.5.6 : $\lim_{r \rightarrow +\infty} n(r)/r^2 = 0$. Donc, si on applique l'inégalité de Schwarz.

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^3} d\theta \right|^2 \\ & \leq \int_0^{2\pi} |\log |f(re^{i\theta})||^2 d\theta \times \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^3} \right|^2 d\theta \\ & \leq \int_0^{2\pi} r^{2(1+\epsilon)} d\theta \times \int_0^{2\pi} r^{-4} d\theta \end{aligned}$$

Et :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{re^{i\theta}}{(z - re^{i\theta})^{1+2}} d\theta \right| = 0$$

9. On en conclut que :

$$\left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{(1)} = \sum_j \frac{-1}{(z - z_j)^2}$$

10. Donc : $g^{(2)}(z) = 0$. Et g est un polynôme de degré 1

□

On ainsi obtenu le théorème cherché.

Théoreme D.5.12. *Hadamard-Weierstrass. Soit f holomorphe d'ordre 1 à l'infini, et d'ordre m en 0. Soient z_i ses autres zéros. Alors, on*

peut écrire :

$$f(z) = e^{g(z)} \times z^m \times \prod_i \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) e^{\frac{z}{z_i}}$$

Où g est un polynôme de degré 1. La convergence du produit est uniforme sur tout compact.